Í N D I C E

GRAÓ EDUCACIÓN

P.V.P. 1600 pts.

UNO

Revista de Didáctica de las Matemáticas

Matemáticas, ¿para qué?

JULIO 1 1994

Campos Semánticos y el problema del significado en álgebra

Romulo Campos Lins
Departamento de Matemáticas IGCE-UNESP, Río Claro Brasil

Producir conocimiento es un para qué hacer matemáticas. Así, se discute cómo se dan formas distintas de otorgar significado a ciertas propiedades simples de tipo algebraico, según "campos semánticos" diversos. Producir significado, se relaciona con el establecimiento de justificaciones en un sistema de creencias y afirmaciones. El autor ejemplifica en el álgebra un modelo teórico de campos semánticos, como reflexión de lo que conlleva establecer un conocimiento más en general.

The production of knowledge is one of the reasons for doing mathematics. Thus different ways of investing certain simple algebraic-type properties with meanig in accordance with various "semantic fields" are discussed. The production of meaning is linked to establishing justifications in a system of beliefs and assertions. The author exemplifies a theoretical model of semantic fields in algebra as a reflection of the implications of establishing more general knowledge.

UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas • nº 1 • págs. 45-56 julio 1994

UNO

La profesora propone a sus alumnos que resuelvan la ecuación 3x+10=100. Casi todos ellos lo hacen sin dificultad, a pesar de que justo ahora están empezando a trabajar con ecuaciones. Animada por el éxito, la profesora propone otra ecuación: 3x+100=10. "Una prueba", piensa ella. Naturalmente, ya había enseñado a sus alumnos los números negativos. Un minuto, dos minutos... y las respuestas correctas no aparecen. Los alumnos contemplan la ecuación como si fuese un ser de otro planeta, dispuesto a devorarlos. De repente, a lo lejos, se oye una voz frágil: "pero esta ecuación no tiene sentido..."

En este artículo vamos a proponer una forma de enfrentarse a tales situaciones;más concretamente, vamos aocuparnos de la produccióndе significado en álgebra. Hablaremos, naturalmente, de álgebra escolar. Y, ¿qué es la álgebra escolar? Adoptaremos la siguiente definición: el álgebra escolar es una colección de afirmaciones sobre relaciones aritméticas, como, por ejemplo, las ecuaciones e identidades. No es necesario que seamos más precisos en nuestra definición, pero, de todos modos, ésta es ya una definición bastante válida.

Por tanto, el problema del que vamos a tratar es éste: ¿qué significa "producir un significado" para las afirmaciones de álgebra?, y, en última instancia, ¿qué es el "significado"?

Veamos unos ejemplos. Si consideramos la ecuación del ejemplo inicial, 3x+10=100, ¿de qué modos podemos procurarle un significado?

- Modo 1: "Tenemos una balanza de dos platos; en uno de ellos hay tres piedras de masas desconocidas pero iguales, más una piedra de diez kilos. En el otro plato hay una piedra de cien kilos, y con todo esto obtenemos un equilibrio."
- Modo 2: "Un todo de valor 100 está compuesto por tres partes iguales, de valor desconocido, y de una parte de valor 10."
- Modo 3: "La x es un número secreto. Multiplico por 3 y sumo 10 al resultado de la multiplicación. El resultado final es 100."
- Modo 4: "Tres veces x, mas 10, igual a 100. La x es un número."

En cada caso se produce un significado para la expresión 3x+10=100 y todos ellos son, naturalmente, distintos entre sí. Más importante aún, dependiendo de qué modo sea el adoptado tendremos distintas justificaciones para las transformaciones que efectuemos en la ecuación.

Consideremos, por ejemplo, la transformación:

3x+10=100 3x=90

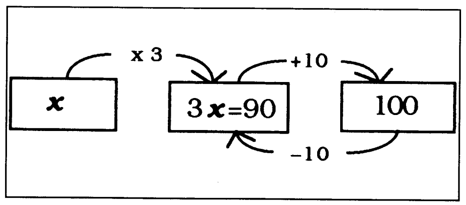
Si adoptamos el Modo 1 de producir significado (que llamaremos *Campo Semántico de la balanza*), podemos dar la *justificación* de que "retiramos diez quilos de cada plato y esto mantiene el equilibrio".

Si adoptamos el *Campo Semántico de todo y partes* (Modo 2), se puede dar la justificación de que "si del todo (100) extraemos una de las partes (10), lo que sobra es la otra parte (3x)".

En el caso del *Campo Semántico de máquina estado-operador* (Modo 3), la justificación sería que "estamos deshaciendo el efecto de sumar 10" (figura 1)

Finalmente, si operamos en el *Campo Semántico del pensamiento algébraico* (Modo 4), la *justificación* podría ser que "sumamos -10 a ambos lados de la igualdad, que queda preservada, ya que ésta es una de las propiedades de las igualdades numéricas".

Figura 1



En cada caso, la igualdad tiene *significados* diferentes: equilibrio, mismo valor, resultado, igualdad numérica.

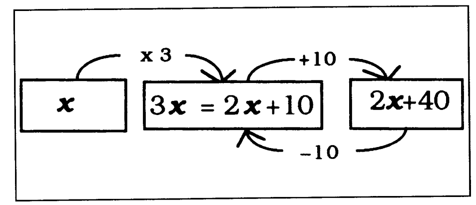
Tres de los "recursos" que mencionamos -1, 2 y 3- han sido ampliamente utilizados como forma de "facilitar" la enseñanza del álgebra. Argumentaremos que en este camino hay muchas trampas y que muchas de ellas no habían sido aún debidamente indicadas.

Sucede que las *justificaciones relativas* 1, 2 y 3 no pueden ser aplicadas a cualquier ecuación, y ello porque, en primer lugar, no todas las ecuaciones tienen *significado* dentro de estos *Campos Semánticos*. Incluso en casos muy simples aparecen las imposibilidades: no se puede producir significado para la ecuación 3x+100=10 dentro del *Campo Semántico de la balanza*, ya que no es posible que un plato tenga 100 y algo más mientras que el otro tenga sólo 10, y tengamos así un equilibrio. De forma parecida, no podemos producir *significado* para la ecuación 3x=100=10 dentro del *Campo Semántico de todo y partes*. Pero a partir del momento en que la persona conozca los números negativos y opere con ellos, no tiene dificultaes en producir *significado* para dicha ecuación dentro del *Campo Semántico de la máquina estado-operador*.

Por otro lado, se puede producir *significado* para la ecuación 3x+10=2x+40 dentro del *Campo Semántico de la balanza de dos platos*, e incluso en un *Campo Semántico de todo y partes* (podemos usar la comparación de todos ellos); pero en el caso del *Campo Semántico de la máquina estado-operador*, a pesar de que formalmente sea posible una interpretación, ésta no nos hace avanzar -en el sentido de que no nos aproxima visiblemente a la solución (figura 2).

Naturalmente, puede decirse que la ecuación 3x=2x+30 es "intuitivamente" más fácil de resolver que la anterior, pero permanece aún una dificultad crucial, la "manipulación de la incógnita", identificada por Filloy y colaboradores (véase por ejemplo, Gallardo & Rojano, 1987). Los *Campos Semánticos de máquinas estado-operador* tienen una característica acusada: en cada paso significativo se produce un valor bien determinado, a partir del cual se puede continuar con el "proceso de solución".

Figura 2



Lo que muestran estos sencillos ejemplos es que no es fácil -iquizás sea imposible!- establecer jerarquías de dificultades para ecuaciones (para que podamos enseñar primero éstas y después éstas otras). Queda claro que si tomamos como base significados producidos dentro de un único Campo Semántico la tarea se simplifica, pero nada parece indicar que los modos de producir significado usualmente llamados "matemáticos" deban tener una primacía a toda prueba. Estos consituyen apenas uno -entre otros- de los modos de producir significado, y cada uno tiene sus ventajas e inconvenients.

Para cada modo de producir significado, es decir, para cada Campo Semántico en el que se opera, las transformaciones posibles y los "métodos" a utilizar son distintos; y todo gira en torno a la noción de justificación.

Dos

Ahora que ya trabajamos con algunos ejemplos, podemor destacar algo más de las ideas centrales usadas en el apartado anterior, de manera que puedan ser mejor comprendidas en su conjunto.

Hablamos de justificaciones, significado y de Campos Semánticos. Para unir estos conceptos es preciso hablar de conocimiento. Este concepto es tal vez uno de los que más se usa en Educación Matemática, sin embargo, es uno de los que menos se discute.

Para nosotros, conocimento es un par: una creencia-afirmación, es decir, algo en lo que se cree y que es afirmado, enunciado, junto con una justificación para esta creencia-afirmación. Al adoptar esta definición, asumimos una posición intransigente: para conocer el conocimiento del alumno no basta con examinar lo que él cree que es verdad: hay que saber qué tiene la justificación para acreditar lo que acredita. No basta con saber, por ejemplo, que en relación a la ecuación $3x+10=100$ tiene la creencia-afirmacion de que implica que $3x=90$. Para seguir usando el conocimiento del alumno es preciso saber por qué cree esto y en base a qué. Esta es la cuestión central de la epistemología: ¿en base a qué acreditamos lo que acreditamos?

¿Cuál es la importancia de que tratemos esta "cuestión epistemológica" como centro de la Educación Matemática? Antes de nada, cualquier profesor que reconozca que el alumno debe participar activamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje debe estar de acuerdo también en que es preciso conocer el conocimiento de los alumnos si queremos interactuar positivamente con ellos; pero, ¿cómo conocer el conocimiento de los alumnos si dejamos de lado precisamente la base sobre la que se ha producido este conocimiento?

Un niño de 5 años puede decir "2+2=4" exactamente igual como lo haría un matemático profesional. Pero, ¿cómo podemos creer que en ambos casos estas creencias involucran las mismas posibilidades de "desarrollo"? Y, por otro lado, es cierto que podemos encontrar muchos adultos que para la creencia-afirmación "2+2=4" ofrecieran la misma justificación que un niño de 5 años -indicarlo con los dedos. Sin embargo, está claro que no sirve de nada especular sobre "potencialidades cognitivas", decir que en este caso el adulto podría entender más cosas: el hecho es que este adulto tiene un conocimiento que es el mismo que el del niño. Y debemos procurar entender de qué manera se ha formado este conocimiento, a través de qué mecanismos.

Discutir la "cuestión epistemológica" es establecer la necesidad de discutir qué es el conocimiento y, más importante, las consecuencias de las concepciones adoptadas.

La concepción de conocimiento que adoptamos nos permite entender el concepto significado: la relación entre una creencia-afirmación y una justificación, que tiene lugar en la enunciación de un conocimiento. Por tanto, el significado está asociado a lo que creemos que es posible hacer o decir, y ésta es la manera en que constituimos objetos. Una "balanza" no es -ni podría ser- la "balanza real que tenemos delante". La mayoría de las personas que hablan de balanzas de dos platos, incluso en sus aulas, no estuvo nunca delante de una de ellas, y si estuvo lo más probable es que no la manipulara personalmente. Entonces, ¿cómo surgió esta balanza? Es muy simple: la balanza es aquello que decimos de ella. Por ejemplo, decimos que podemos retirar la misma cosa de ambos lados sin alterar su equilibrio. Incluso un autómobil, incluso si la realidad nos hace decir que probablemente se romperia, que este es un caso hipotético, etc. Pero, ¿cuántos de nosotros decimos que la balanza es un objeto que gira? En realidad lo hace, sólo que de una manera irrelevante para lo que normalmente nos interesa, el equilibrio. Digamos: ¿Como es que la balanza gira?

Y aún más: supongamos que presento a los niños que no conocen las balanzas de dos platos un programa de ordenador con dos cajas en las que se pueden colocar "objetos" (de ordenador, naturalmente), algunos de valor conocido, otros de valor desconocido; y supongamos que existe un pequeño indicador que nos dice cuando son iguales los valores de las cajas o cual de los dos valores es mayor. Si limito los valores a los números positivos, es evidente que estoy produciendo una "simulación" de balanza. Pero los niños van a construir un objeto que no tiene ninguna relación con el mundo físico. No hay ninguna ley física que garantice la experiencia "correcta" que les haga entender qué es una balanza. Pero incluso así, los niños van a construir un conjunto de conocimientos que, al ser enunciados, no pueden ser distinguidos de los que supuestamente serían producidos por la experiencia con una "balanza real". Si alguien dijese que "podemos doblar lo que hay en cada lado y mantener la igualdad, porque podemos mantener el equilibrio con cantidades iguales en ambos lados", este alguien será una "persona-balanza" o una "persona simulación"?

Veamos: esto no implica que "la realidad no existe", o que "todo es una ilusión". Lo que nuestra proposición implica es que conocimiento es algo del ámbito del lenguaje y, por tanto, típicamente humano. En este punto nuestras concepciones se aproximan bastande a las de Vygotsky y sus adeptos (Vygotsky, 1978). Este conocimiento se genera y tiene su existencia en el ámbito del lenguaje, y debemos buscar el significado en la articulación entre creencias-afirmaciones y justificaciones, y no en una supuesta "esencia" de la que supuestamente emana. El equívoco de pensar lo contrario es lo que hace que se establezca la nociva noción de que los símbolos del lenguaje algebraico están "sistemáticamente vacíos" en cuanto se supone una "plenitud semántica" de las "cosas". Pero si esto es verdad, ¿por qué sucede que adultos "cognitivamente plenos" no consiguen dar significado a un horno microondas, un significado que vaya hasta su esencia en lugar de contentarse con la superficialidad de su uso? Lo que llamamos "cosas" no se presentan "en si" a nuestra percepción para que conozcamos su esencia. Las "cosas" son tan "semánticamente vacías" como cualquier símbolo de álgebra (que, por otro lado, vistos como marcas en un papel son también "cosas"...)

Finalmente, un Campo Semántico es un modo de producir significado, un modo de constituir objetos y de producir justificaciones de lo que estos objetos son y de lo que hacemos con ellos. Los Campos Semánticos están constituidos y deben ser objeto de atención por parte del alumno.

Hay otros dos conceptos centrales en el Modelo Teórico de los Campos Semánticos (MTCS), los conceptos de verdad y de interlocutores, pero su discusión haría demasiado largo este breve artículo. Baste decir aquí que verdad no debe ser entendida como un atributo del contenido de lo que se dice -si, por ejemplo, lo que se dice es no es "verdadero", si "corresponde a la realidad", como en las teorías de verdad por correspondencia- si no un atributo de una enunciación: decir establece la verdad de una creencia-afirmación, dado que este decir implica creer que esta afirmación pertenece al mundo. Y la justificación es lo que une lo nuevo a lo que ya está dado en el mundo.

El MTCS lleva a otra distinción importante. Cuando observamos a alguien haciendo algo, y si dicho alguien no es capaz de explicitar lo que está haciendo y porqué lo está haciendo, no hay razón para que digamos que "tiene un conocimiento".

Por otro lado, es perfectamente correcto que el observador enuncie creencias-afirmaciones respecto al alumno y que produzca justificaciones para estas creencias-afirmaciones.

Por ejemplo, podemos observar a alguene calculando el precio de tres cosas que cuestan 27 cada una, y observando que escribe en un papel "60+21=81", enunciar la creencia-afirmación de que "usó la propiedad distributiva", con la justificación de que "multiplicó separadamente". Ciertamente éste en un conocimiento del observador, pero decir que es un conocimiento del alumno implicaría asumir que el en sistema de conocimiento del alumno existe separadamente, de alguna forma, un objeto con propiedades idénticas a las de lo que llamamos la "propiedad distributiva". Pero es también perfectamente posible que esta "propiedad" esté totalmente "adherida" a otras actividades, de manera que no se pueda hablar de ella si no es en presencia de tales actividades.

Pongo un ejemplo. Hace tiempo mi hijo aprendió que para encender nuestro televisor tenía que hacer algo asociado a una pequeña cajita negra (el mando a distancia). Un día, en casa de unos amigos, encontró una mando con botones, pero que era el mando de la cadena de sonido, no del televisor. Sin embargo, inmediatamente se sentó delante del televisor -en la misma habitación había uno- y dirigió el mando hacia él, emitiendo los sonidos y haciendo los gestos característicos de cuando intentava encender nuestro televisor. Para él el televisor y el mando formaban un único objeto, monolítico, mientras que para nosotros este conjunto podría ser entendido como objeto complejo, compuesto de partes separables. Tal vez la "propiedad distributiva" del pequeño vendedor sea una parte inseparable de la venta de cosas iguales.

Resumiendo: por un lado tenemos lo que yo, el observador, veo como posibilidad de enunciación de conocimiento; por otro lado, hay una efectiva enunciación de conocimiento, una efectiva producción de conocimiento por parte de una persona. Es exclusivamente en este proceso de enunciación cuando se constituye el conocimiento. ¡Y no olvidemos que el observador puede ser observado!

Para la Educación Matemática, este es un aspecto de tremenda importancia, ya que deja bastante claro que no basta con decir que "el alumno construye su propio conocimiento": es preciso disponer de un referencial teórico según el cual el resultado de esta construcción sea tomado como auténtico, y no como simple "recapitulación" de un "conocimiento correcto y a punto para ser construido". En otras palabras, debemos adoptar una posición epistemológica según la cual el niño sea también el arquitecto y el ingeniero, y no simplemente el albañil de una casa en la que no va a vivir. El MTCS indica una posición epistemológica en la que el ideal de racionalidad "intrínseca" (cf. Walkerdine, 1988, p.5) es substituido por una racionalidad negociada, toda vez que las justificaciones no son si no una "explicación de la esencia", si no la expresión de la expectativa de acuerdo. Desde este punto de vista, queda claro que los alumnos irán a operar dentro de los Campos Semánticos que les parezca que garantizen su derecho a hablar.

Tres

Una vez en posesión de los conceptos básicos del MTCS, vamos a examinar brevemente el caso de las fracciones. Aquí el lector debe esperar una mera exploración superficial que indicará posibles direcciones para la reflexión e investigación.

Suele ser habitual que en la escuela el estudio de las fracciones sea iniciado con "pizzas" o "pasteles". Se dice que Juan comió 2/5 de una pizza si ésta fue dividida en 5 partes iguales y se comió dos. Queda claro que estamos operando en un Campo Semántico de todo y partes.

Aparece un problema cuando queremos que los alumnos sumen fracciones, cuando para éstas se produce significado dentro de un Campo Semántico de todo y partes -en 10 partes iguales, y la suma es... 6/10!

Al intentar corregir este "defecto" diciendo que lo que queremos saber "de hecho" es "cuántos trozos de 1/5 hay en el todo", en realidad estamos obligando al alumno a operar en un Campo Semántico distinto del anterior. En este nuevo Campo Semántico, las fracciones unitarias son usadas como unidades y se introduce la noción de medida de una forma bastante parecida a la adoptada por Diofante (Grecia, siglo III), para quien 4/5 podía indicar apenas cuatro "1/5". Lo importante es ver que podemos producir significado para el objeto "fracción" dentro de dos Campos Semánticos distintos, y que en cada caso tenemos objetos distintos con propiedades distintas.

En el caso del Campo Semántico de fracciones como cantidad de unidades fraccionarias, es fácil sumar fracciones del mismo denominador y después extender el proceso a la suma de fracciones de cualquier tipo. Pero no hay elementos para que se produzca, de inmediato, un significado para la multiplicación de fracciones: ¿qué significa multiplicar, por ejemplo, 1/5 y 2/3? Desde luego, sería una solución decir que este producto significa tomar 1/5 de 2/3, pero en este caso estaríamos cuantificando con una fracción, un proceso nuevo en relación al Campo Semántico anterior; menos aún podría producirse significado dentro del Campo Semántico de todo o partes.

Los ejemplos con fracciones -así como los de álgebra-, pueden ser multiplicados y profundizados, pero lo que me gustaría destacar es que al producir significado para el objeto "fracción" dentro de un Campo Semántico, nos estamos comprometiendo al mismo tiempo con cosas que pueden y no pueden ser hechas con estos objetos. No basta con intentar que los alumnos produzcan un discurso, una colección de creencias-afirmaciones: todo conocimiento tiene justificaciones, existe en Campos Semánticos y, por tanto, hay unos límites para lo que puede ser enunciado sobre estos objetos.

Cuatro

¿Cuál es el reflejo de todo esto en el aula? Nos parece que la dirección más fructífera es hacer que las justificaciones pasen a ser también un contenido, un asunto a ser discutido en las aulas. Pero no todas las justificaciones de "Matemática oficial", sinó todas las justificaciones.

Es importante que los alumnos desarrollen la noción de que cuando afirmamos algo que creemos, también tiene que ser posible producir una justificación, y que en muchos casos hay varias justificaciones posibles, cada una de ellas producida dentro de un Campo Semántico. Una persona resuelve un problema de balanza usando una ecuación y una solucion algebraica (véase Lins, 1992); otra persona va a resolver una ecuación pensando en una balanza. Desde el punto de vista epistemológico, hay algo idéntico: producimos significado dentro de algún Campo Semántico y operamos en él, y es en él donde se establece la lógica de las operaciones que vamos a utilizar.

Es frecuente encontrar aproximaciones didácticas en las cuales balanzas y áreas, por ejemplo, son utilizadas para "facilitar" el aprendizaje del álgebra. Desde el punto de vista de MTCS, en estas aproximaciones hay un error: el "álgebra de la balanza" elabora una forma propia de producir significado para el álgebra, constituye un Campo Semántico. Esto significa que el conocimiento producido es indivisible, y que no se puede separar una creencia-afirmación que tiene significado en relación a objetos constituidos dentro de un Campo Semántico, que se aplique "automáticamente" a objetos constituidos dentro de otros Campos Semánticos, en los cuales no sea posible producir significado para aquellos objetos.

Como ejemplo, tomemos el caso de la ecuación $3x+10=100$. Dentro del Campo Semántico de la balanza, la transformación "sacar diez de cada lado" tiene significado; pero la ecuación $3x+100=10$ no es un objeto dentro del Campo Semántico de la balanza y, por lo tanto, no se debería esperar que la transformación "sacar diez de cada lado" sea inmediatamente aplicable a ella.

Veamos la dificultad: el alumno estaría siendo obligado a tener una creencia-afirmación en relación a un objeto para el cual no tiene significado, o entonces, forzado a justificar una transformación refiriéndose a algo que el objeto en cuestión no puede ser - un equilibrio en una balanza.

Me parece que la única forma de afrontar esta dificultad es hacer que los alumnos discutan explícitamente de las justificaciónes que tienen para sus creencia-afirmación, es decir, que discutan y examinen los Campos Semánticos en los cuales están operando.

CINCO

Aquí presentaré una breve disertación sobre una aproximación didáctica que permite que los alumnos discutan y examinen los Campos Semánticos en los que están operando. Las actividades descritas fueron realizadas por un grupo de alumnos de una escuela básica de Sao Paulo, Brasil, alumnos de 6º (11-12 años).

Empecé proponiendo la siguiente actividad:

Añadiendo nueve cubos al depósito de la izquierda estará lleno; añadiendo 5 cubos al depósito de la derecha estará lleno.

En esta situación, ¿qué podemos decir de los depósitos?

Obsérvese que no es un "problema a resolver", ni tan solo un "problema abierto, (un problema con muchas soluciones). El "espíritu" de esta actividad es parecido al que tendríamos si dijésemos "vamos a hablar de aquel árbol". La razón por la cual adoptamos este tipo de actividad es delimitar para una misma situación lo que es nuevo y lo que está dado. Esta distinción, que ya hemos utilizado antes en este artículo, fue definida por Bruner, que la tomó de los lingüistas (Bruner, 1991). Bruner observó, con precisión, que cuando "resolvemos un problema" toda charla interior (inner speech) se concentra en lo nuevo y elimina lo dado. Para el MTCS, las creencias-afirmaciónes corresponden a lo nuevo y las justificaciónes corresponden a lo dado. En el tipo de actividad que proponemos, conviven en una misma campo lo nuevo y lo dado, de manera que la importancia de cada uno es examinada.

Sugerimos a los alumnos que utilizasen una "notación literal-aritmética": $x+9b=y+4b$, por ejemplo. Después de haber producido diversas "frases", todas ellas justificadas en relación a la situación de los depósitos (figura 3), pedimos que investigasen la posibilidad de generar nuevas "frases" a partir de las ya conocidas, es decir, empezamos a trabajar con la transformación directa de expresiones.[1]

Figura 3

Expresiones	*Justificaciones para las expresiones*
$x + 9.b = y + 5.b$	"Esta frase es correcta porque los dos cubos (sic) se pondrán completos"
$x + 4.b = y$	"Si añado 4 cubos al depósito de la izquierda, los dos tendrán la misma cantidad"
$x + 2.b + y - 2.b$	"x + 2 cubos completan el depósito, cuando faltan 7 cubos (sic.). En el y hay 5 menos, y si hacemos -2 se convertirá en -7."
$x + 3.b = y - b$	"Si faltara otro, también estarían faltando 6"

Para cada nueva expresión creada tenían que producir al menos dos justificaciones, una dentro del Campo Semántico de los depósitos y otra en relación a la transformación directa (en la figura 4, presentamos las tres últimas frases de la figura 3, junto con justificaciones para transformaciones directas). En este estadio es cuando empezamos a construir la idea de que hay formas diferentes de producir significado para una expresión.

Es importante observar que no siempre una justificación producida en un Campo Semántico podía ser inmediatamente relacionada con la producida en otro Campo Semántico. Pero más importante aún, usando transformaciones directas podemos generar expresiones que pueden no tener significado en relación a los

UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas • nº1 • julio 1994

Figura 4

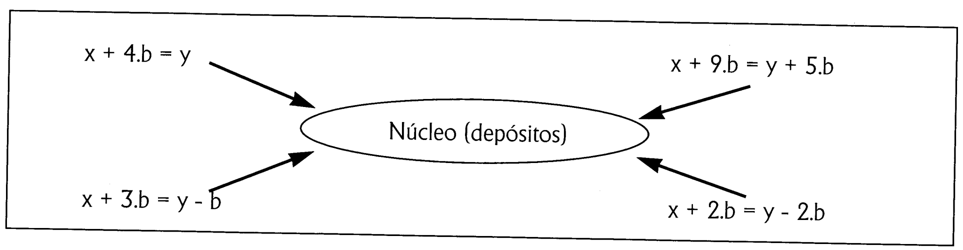
Expresiones	*Justificaciones para las expresiones del Campo Semántico de los tanques*	*Justificaciones para transformaciones directas*
x + 4.b = y	"Si añado 4 cubos al depósito de la izquierda, los dos tendrán la misma cantidad"	"Saco 5 b de cada lado de la frase x + 9.b = y + 5.b
x + 2.b = y - 2.b.	"x + 2 cubos completan el depósito, cuando fantan 7 cubos. (sic.) En el y hay 5 cubos menos, y si hacemos -2 se convierte en -7"	"Saco 2 b de cada lado de la frase x + 4.b = y"
x + 3.b = y - b	"En x hay 6 cubos menos, y en y faltan 5; faltara otro también estarían faltando 6"	"Sumé b a cada lado de la frase x + 2.b = y 2.b

depósitos, por ejemplo, x+10b=y+6b, toda vez que no es posible colocar 10 baldes en x. Este punto es donde se hace más clara la distinción entre los dos modos de producir significado, ya que es posible generar objetos dentro de uno de los Campos Semánticos, que pueden perfectamente no tener significado en otro Campo Semántico.

Con este tipo de actividad los alumnos pudieron reconocer que la manipulación directa de expresiones es una actividad dirigida a producir nuevas expresiones, y que ello es tan legítimo cuando se hace dentro del Campo Semántico de los depósitos, ello significa que la manipulación directa de expresiones adquirió sentido.

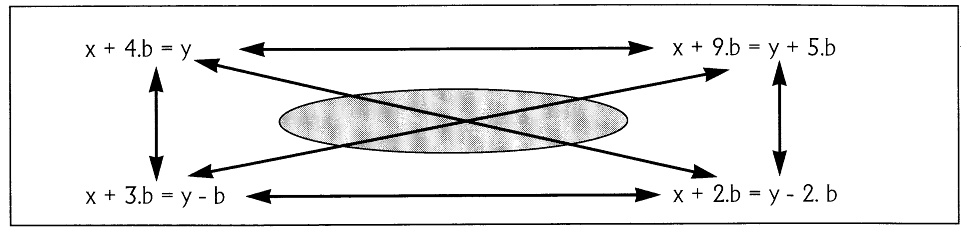
Vale la pena además observar que los dos Campos Semánticos que estamos tratando son diferetes en un aspecto importante. El Campo Semántico de los depósitos es lo que llamamos nucleado: la validación de cada expresión está hecha en relación a un núcleo, en este caso, "la balanza" (figura 5a).

Figura 5a



Por otro lado, la validación de expresiones dentro del Campo Semántico "de las expresiones" está hecha a partir de principios, y se establece una red de expresiones (figura 5b).

Figura 5b



SEIS

El MTCS surgió debido a la necesidad del autor de responder las preguntas "¿Qué es el conocimiento?" "Qué es el significado?" En la base de la construcción del modelo está la noción de que el conocimiento es algo típicamente humano, y más aún, del dominio del lenguaje; y el punto de partida es una definición que dice que conocimiento es un par constituido por una creencia-afirmación y una justificación, aquello en lo que creo y por qué creo aquello.

Asumir esta posición nos lleva a la necesidad de transformar las aulas en un espacio en el que sea suficiente que los alumnos sean capaces de hacer ciertas cosas: es preciso que aprendan también a hacerse dueños de los modos de producir significado que utilizan. Pero esta preocupación no busca simplemente descubrir y exponer los "engaños" a los alumnos (las misconceptions); mucho más importante que esto es que el educador matemático que adopta el MTCS intentará establecer la organicidad del conocimiento de sus alumnos, intentará establecer las características, las implicaciones y los límites de los modos de producir significado en los que operan sus alumnos.

Pero si bien en un modelo piagetiano la organicidad viene dada por una lógica propia en cada etapa del desarrollo intelectual, en MTCS, al contrario, esta organicidad establece las lógicas dentro de las cuales operan los individuos; y, más aún, estos modos de producir significado y, por lo tanto, las lógicas de las operaciones, son negociadas en el interior de las culturas, en el interior del proceso colectivo de producir un mundo de significados. Una aula debe ser entendida como un espacio en el que tienen lugar estas negociaciones; en él se presentan los modos de producir significado de los alumnos y del profesor, y todo ello envuelto en las influencias de una cultura escolar (representada, por ejemplo, por los libros didácticos) y por la estructura de relaciones entre los participantes del proceso.

El MTCS indica que cada conocimiento es un todo orgánico de una creencia-afirmación y una justificación. Hemos visto, en particular en el caso de las ecuaciones, que este hecho puede explicar, por sí solo, de qué modo se constituyen en obstáculos del desarrollo del aprendizaje; cabe a nosotros, profesores, proponer un ambiente de aula en el que este proceso no sea inaccesible al alumno.

Creemos que para la práctica didáctica las principales consecuencias de adoptar MTCS son:

• un uso prudente y al mismo tiempo efectivo de actividades hasta ahora consideradas simplemente como "facilitadoras" (balanzas, áreas, todo-parte, en el caso de las ecuaciones; pero también todo tipo de material concreto y de situaciones, realistas o artificiales);

• una comprensión más clara de que los modos de producir significado de la "matemática oficial" (por ejemplo, el pensamiento algebraico tal como está definido en Lins, 1992), no son los únicos; sobre todo, que no son "la Roma a la que llevan todos los caminos", es decir, que hay que revisar la noción de que detrás de todo proceso de producir significado encontraremos, "en algún lugar de nuestras mentes", operanco consciente o inconscientemente, los modos matemáticos. Es exclusivamente desde esta perspectiva cuando los modos matemáticos de producir significado pueden encontrar su verdadero lugar, y nosotros podemos reencontrar su verdadera naturaleza: son el producto de culturas y fueron desarrollados como forma de sistematizar discursos (conjuntos de creencia-afirmación) que se presentaron como importantes en determinados momentos históricos.

En estos dos frentes -entender el proceso de construcción del conocimiento en su carácter individual y colectivo- y en la tarea de articular estos dos entendimientos es donde creemos que el MTCS ofrece una perspectiva fructífera.

Nota

1. En la expresión literal del texto y en las tablas que siguen *x* representa el agua en el depósito de la izquierda e *y* el agua del depósito de la derecha; *b* representa el agua de un cubo.

Referencias bibliográficas

BRUNER, J.: Vygotsky: a historical and conceptual perspective, en J. Wertsch (ED.). *Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action.* Londres, Harverter, 1991.

GALLARDO, A & ROJANO, T.: Common difficulties in the learning of algebra among children displaying low and medium pre-algebraic proficiency levels, en J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran, PME XI, 1, 301-307, Montreal, 1987.

LINS, R. C.: *A framework for understanding what algebraic thinking is,* PhD Tesis; Universidad de Nottingham, Gran Bretaña, 1992.

VYGOTSKY, L.: *Mind in Society,* eds. M.Cole; V. John-Steiner; S. Scribner; E. Souberman; Cambridge, Harvard University Press, 1978.

WALKERDINE, V.: *The Mastery of Reason.* Londres, Routledge, 1988.

El planteamiento de problemas y el razonamiento hipotético en geometría[1]

Nicolina A. Malara **Loredana Gherpelli**

Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática
Departamento de Matemáticas - Universidad de Módena

Se exponen las líneas maestras y los principales resultados de una investigación realizada en actividades de grupo con alumnos y alumnas de 12-13 años, que pretendía conducirlos a plantearse y plantear problemas en el campo de las figuras geométricas elementales planas, mediante la construcción de los propios enunciados de dichos problemas. El objetivo de la investigación era estudiar las posibilidades reales de los estudiantes de esa edad de plantear problemas sobre el ámbito considerado y obtener información sobre los efectos del trabajo sobre la cooperación de los alumnos en el proceso.

Desde un punto de vista general, se ha demostrado que el planteamiento de problemas favorece el desarrollo de las capacidades de resolución de los problemas planteados y estimula el metaconocimiento. Desde el punto de vista metodológico, se ha puesto de manifiesto la eficacia del trabajo en grupo tanto en el ámbito del planteamiento y resolución de los problemas, como para contribuir a la superación de las dificultades de los alumnos y alumnas menos adelantados.

The broad outlines and major findings of a piece of research using group activities with pupils aged between 12 and 13 are presented. The aim was to get the pupils to set problems, for themselves and others, concerning flat elementary geometrical figures by encouraging them to pose the problems in their own terms. The aim of this research was to study the actual potential of pupils from this age-group for posing problems in this area and to obtain information about the effects of this work on co-operation among pupils in the process. The research was divided into three stages. It looked at the pupils in their roles as problem setters, as critical reviewers of the problems posed, and as observers of analogies with the problems set and/or presented in textbooks. From a general point of view, it was shown that setting problems themselves helps to develop the skills involved in solving the problems set (via the identification and working up of possible problems in regard to a given geometrical figure) and stimulates meta-knowledge (via control of the strategies underlying the different situations set up, knowledge of the fundamental relations among the various elements of the geometric figures studied, and mastery of the range of classical problem models concerning these figures). From the methodological point of view, the efficiency of groupwork in posing and solving problems, as well as in helping less advanced pupils to overcome their difficulties, was demonstrated.

UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas • nº 1 • págs. 57-74 • julio 1994