GRAÓ

V.P.
750 PTA

UNO

Revista

de Didáctica

de las

Matemáticas

El futuro del álgebra y la aritmética

Sentido aritmético y algebraico, ¿o algo más?

Rómulo Campos Lins
UNESP Río Claro
Joaquim Giménez
Universitat Rovira i Virgili

• • •

Es importante que un nuevo planteamiento del álgebra y los números intente tener un sentido aritmético y algebraico. Esto será así si se aplican, controlan y desarrollan soluciones a problemas o situaciones reales. Pero eso requiere dotar de significado a los contenidos y procedimientos, así como no perder de vista actitudes y valores apropiados del razonamiento matemático.

Number sense and algebraic sense, or something more?

A new role of planning numbers and algebra is revisted and required. Number sense and algebraic sense plays an important role for this requirements. We have number-algebraic sense if we apply, control and develop contextual solutions to real problems or situations. It means to have meanings for concepts and processes, but no loosing attitudes and values belonging to mathematical reasoning.

• • •

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA ESCOLAR. SUPERANDO EL CONTEO Y LA NUMERACIÓN

Durante muchos años, la aritmética se ha considerado como la antesala del trabajo algebraico, pero eso es algo que debe cambiar. El conteo y la numeración *han sido los puntos claves de la enseñanza-aprendizaje numérico.* Se necesita saber contar (y por lo tanto, conocer los números) antes de descomponer un número en decenas y unidades, para luego introducir centenas, y así ver algún día lo que es el sistema de numeración decimal, y más adelante lo que es un resultado exacto y aproximado. Esto, junto con las operaciones, es lo esencial del aprendizaje primario. Mientras la aritmética escolar sigue siendo el arithmos technion (= técnicas con números o numeración), el álgebra escolar -en cambio- ha perdido su origen (aldjaber = recomposición o restitución) (Picatoste, 1862). Sólo hay que ver los programas de muchos países: se reducen a aritmética con letras.

UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas • nº. 9 • págs. 23-31 • julio 1996

En las aulas, tanto en aritmética como en álgebra, se han dado dos visiones opuestas: la extremadamente formal y tecnicista regida por la estructura o la utilidad, y la simplemente manipulativa basada en que el alumnado conozca lo que hace. Ambas son parte de la «vieja» visión aritmeticista o estructuralista. Vamos a multiplicar; es necesario sumar, porque se trata de una adición repetida; primero multiplicamos por números de una cifra, luego por dos,... y no deberíamos obtener como resultado números grandes. Después, tenemos que hablar de múltiplos (más teórico) para poder hablar de múltiplos de 3 (ejemplo concreto), y luego ver si un número es múltiplo de 3 o no (aplicación de la definición). La enseñanza pretende -sin conseguirlo- que un estudiante diga entonces que «a/b es la fracción-número 3 sólo si a = 3b». ¿Pero es verdad que esos «contenidos» (numeración, multiplicación, múltiplos, fracciones) son tan distintos? ¿Es cierto que se necesitan de forma tan encadenada? ¿Hay que mantener esa visión reformista que sólo relaciona adición con sustracción, multiplicación con división? Seguro que los lectores responderán que no. Pero, ¿cómo trasladar ese *no* a un proceso de enseñanza-aprendizaje nuevo y productivo en el aula ?

Centrando objetivos. ¿Qué hacer con los recursos?

Jugar y manipular son consignas que todos conocemos. Algunos consideran que aunque así se trabaja la aritmética, no se puede llegar al álgebra. ¿Debemos dejar de lado los elementos manipulativos como las regletas de colores? Los que hace diez años decían que no, ahora dicen que «no hay en los centros». El nuevo problema para todos, tanto si utilizamos o no los materiales es: ¿no estaremos pensando en usarlos con el único objetivo de llegar a *saber*... sin valorar los procesos... incluso algebraicos? ¿No estaremos olvidando que entre los contenidos de todo tipo existen relaciones, y que éstas sólo se ven, usan, plasman,... proponiendo problemas para investigar? ¿Y no será que no nos hemos planteado nunca que un aprendizaje debe integrar lo difícil? ¿Qué espacio dejamos para el análisis y la síntesis si sólo se manipula con letras o números? ¿Y la tecnología?

He aquí, como ejemplo, un problema para niños de 8 años con contenido algebraico, que establece relaciones; no es difícil y además utiliza las regletas de colores o cartulinas lineales con los números del 1 al 10: «Cierra los ojos. Toma una regleta (de número desconocido), o una combinación de ellas. ¿Cómo saber si el número total es par o impar? ¿Hay alguna forma de averiguarlo sin mirar y sin contar?».

Otro ejemplo claro, que lucha contra los detractores del método de aproximación para la enseñanza de la división, es el siguiente: «Soy productor de lápices en una fábrica de elementos de escritorio. Debo repartir los 435 lápices que se producen en una hora, en cajas. ¿Cómo hacerlo?». La discusión que va a seguir a la reflexión del alumnado no sólo va a conducir a la conclusión de que la acción de repartir se corresponde con el contenido de dividir, sino que la pregunta abierta plantea temas tan dispares como:

- Un trabajo sobre la exactitud o no, que llevaría a los divisores de 435,
- El propio algoritmo de la división, haciendo paquetes,
- El razonamiento hipotético general, «qué ocurriría si fueran...»,

- Las congruencias, observando los lápices que quedan sin caja...
- Invenciones diversas.

¿Por qué evitar este tipo de reflexiones que dará lugar a trabajos monográficos de los estudiantes y eliminar uno de los pocos placeres de la escuela como es el descubrimiento?

MEJORAR LOS SENTIDOS

El aprendizaje efectivo actual se enfrenta con la complejidad. Y la complejidad no se alcanza por la suma de las partes, sino por análisis y síntesis de relaciones en forma arbórea: de modo organizado a veces, anárquicamente otras, volviendo atrás, avanzando y proponiendo cosas desconocidas, etc. De lo contrario, se frena el cambio hacia una enseñanza de la aritmética y del álgebra más unidas. En efecto, el «sentido común» dice que el todo es mayor que la parte y, por lo tanto, el resultado de una suma con naturales es mayor que sus sumandos. Pero cuando uno descubre cómo funcionan los enteros, se ve que una suma puede ser menor que uno de los sumandos. Para reconocer eso, es preciso poseer significados del entero, y una vez trabajado bastante el sentido numérico (no común), es muy probable que se amplíe al campo de los enteros. Si se sigue así, viendo esas pérdidas de sentido y alcanzando nuevos sentidos, se progresa científicamente. Es decir, descubrir mediante investigaciones, va a mejorar el sentido y es así mismo una forma de considerar la diversidad del alumnado.

Mostrar «nuevo descubrimientos», por ejemplo, las estructuras de procedimientos aritméticos como algo novedoso, es lo contrario de lo que hemos expuesto. Unos alumnos en prácticas decían: «Mira. Los chicos tienen una lista de problemas, y deben indicar cuáles se resuelven mediante una adición y una sustracción, cuáles mediante dos adiciones, cuáles mediante dos sustracciones... Está en el libro»... Eso es tan nefasto como el querer ver que la adición y la multiplicación con números naturales poseen la propiedad conmutativa, asociativa, existe elemento neutro, pero no hay simétrico sin haberle dado significado a partir de una investigación... «Yo no les cuento lo de grupo, anillo...» Bien, pero ¿por qué se cuenta eso? Estas visiones no son buenas interpretaciones de descubrir, y no mejoran un sentido numérico ni algebraico, como se puede deducir viendo a los estudiantes resolviendo problemas.

CADA CUAL OTORGA SIGNIFICADOS... SI LE DEJAMOS

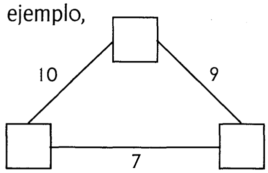
Nos sorprendemos cuando vemos que alumnos de 7 años saben darnos motivos del porqué un número «más largo» es mayor (Lerner & Sadowsky, 1994). No nos creemos que unos chicos de 11 años puedan «generalizar» un aritmograma. (Por ejemplo, en la figura 1, buscar los números de los vértices, sabiendo lo que suman dos vértices consecutivos.)

Lo que el maestro de Juan supo provocar (después de que Juan explicase lo que había

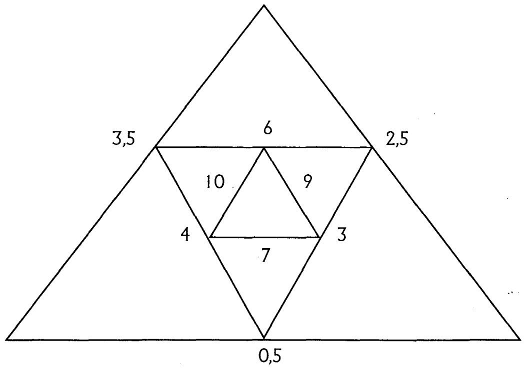
Figura 1

Buscar los números de los vértices sabiendo que el número que figura es la suma de los vértices consecutivos

Del ejemplo,



Juan generalizó a...



encontrado) es la reflexión sobre el hecho de que si la suma (4 + 6 + 3) no es un número natural, las soluciones deben ser decimales... Y en algún caso esa sucesión de triángulos va a dar números enteros. Experiencias como ésa las hemos desarrollado en la formación de profesores con gran éxito y sin dificultades.

El ejemplo anterior es un buen trabajo en que el estudiante acaba planteando que en un caso general (Pirie, 1994) con números desconocidos en los vértices y con lados a, b, c, la suma de los números desconocidos es 2 (a + b + c) e incluso preguntándose si es lo mismo que 2a + 2b + 2c. ¡Eso no lo esperaba! En nuestra experiencia con profesores, algunos fueron probando -como los chicos- y otros, resolvieron el aritmograma por medios algébricos porque nadie prohibió hacerlo de este modo. ¡Lo mismo ocurriría con el alumnado de 13-14 años! Cada cual descubre lo que quiere y lo que puede, de acuerdo con su conocimiento... Es decir, cada uno construye con el sentido numérico-algebraico que posee. Dejarse sorprender por un estudiante y reconocer la creatividad y originalidad implícitos en respuestas no previstas, es una gran cualidad exigible al profesor actual. No sólo proporcionar sorpresas, sino aceptarlas de los demás.

Consideramos que haber enfatizado las dificultades de conocimiento (por el enfoque psicológico de los últimos años), puede hacer olvidar la reflexión sobre lo que es la propia aritmética. Y viceversa, haber tratado de hacer un trabajo teórico deductivo (los años anteriores), es un error histórico que parcializa nuestra cultura occidental. En efecto, la aritmética incluye no sólo aprender la numeración y el conteo sino:

- *Reconocer y utilizar* significaciones diversas (por ejemplo, usar puntos de referencia que amplían lo simplemente manipulativo, en casos de aproximación),
- *Analizar* el porqué de algoritmos (por ejemplo, justificar conceptualmente el porqué de la regla de divisibilidad por 3,
- *Usar adecuadamente* y *razonar* reglas (por ejemplo, de muchas técnicas, destrezas y habilidades combinatorias),
- *Realizar descubrimientos* o «teoremas» (por ejemplo, situaciones de teoría de núme-

ros). Esto sólo se consigue si se promueve un aprendizaje basado en la producción y descubrimiento constante.

De forma semejante, trabajar el álgebra no es sólo el tratamiento y uso de reglas de un lenguaje simbólico. Es ante todo:

- Reconocer la *diversidad de lenguajes* para expresar realidades, de forma general (por ejemplo, álgebra lineal, lenguaje informático, etc.) dando significado a situaciones diversas para resolver problemas,
- *Especializar las reglas sintácticas* que rigen esos lenguajes (por ejemplo, sistemas de ecuaciones),
- *Razonar sobre las relaciones o traducciones* entre ellos (por ejemplo, geometría algebraica) insistiendo en la significación del razonamiento,
- Identificar y desarrollar la capacidad de *distinguir cuál de ellos es el más adecuado* (parametrización, desarrollo matricial, etc.).

Pero también:

- Usar un *lenguaje general* para describir procesos de síntesis no necesariamente aritméticos (por ejemplo, espacios vectoriales), clasificación, etc.
- *Razonar sobre estructuras generales en fenómenos* (ejemplo, teoría de grupos) sistematizando lo que sea preciso.
- Ser capaces de aplicar *símbolos a un razonamiento* para darle generalidad (ejemplo, demostración formal, lógica algebraica),...

Adquirir sentido numérico-aritmético-algebraico comprende, por lo menos, saber resolver situaciones de diversos tipos, justificando el porqué se adoptó una u otra idea.

LAS PREOCUPACIONES DEL PROFESORADO

Mientras pronunciamos discursos como el anterior, muchos profesores se preguntan ¿hay algo que cambia en las propuestas de reforma educativa y de programas? ¿hay algo que debe cambiar en las aulas?... A menudo se oyen frases como éstas: «Si no enseñamos a resolver ecuaciones, ¿cómo van a resolver problemas mediante el lenguaje algebraico?», «¿Quién lo hará?» o «Lo importante es que sepan dominar las operaciones elementales cuando vienen de primaria y ya iremos introduciendo el sentido matemático en secundaria» que están dando paso a estas otras: «Ni siquiera operan correctamente con los naturales», «Usan la calculadora, pero no saben cuándo el resultado no es correcto»... En el fondo, muchas de estas frases ocultan cierto desafío personal: ¿qué voy a hacer si no enseño a resolver ecuaciones? O bien una pregunta más abierta y extrovertida: ¿qué debo o puedo hacer? Cuando el formador dice: «Haz más geometría», o «Haz problemas y admite que no se resuelvan mediante el álgebra» la contrarréplica es inmediata: «Esa no es la respuesta».

La dificultad es aún mayor si se piensa que nos hemos deslumbrado por el problema del lenguaje. Es decir, resolver situaciones de lenguaje aritmético o algebraico -

que era necesario- no es el fin y la solución de todos los males. Algunos profesionales hemos creído ver que la importancia por otorgar significado a los símbolos y a las operaciones va a resolverlo todo... Las dificultades no se resuelven, son los estudiantes quienes deben otorgar significado y no el profesor quien lo «enseñe». La impaciencia y la insatisfacción de muchos profesores frente a los «resultados» que se observan con los estudiantes de 14-15 años, parece adueñarse de un colectivo que hasta hace unos años no reflejaba esa preocupación. Las reformas han sido necesarias, pero no suficientes. Entre otros factores, creemos que no ha bastado la argumentación sobre la atención a la dificultad («los temas algebraicos y de análisis deductivo son los más difíciles»), y a la motivación. Eso no convence ahora a nadie, y mucho menos, porque se identifica (en el marco de la impaciencia) con «no atacar el problema». No cuesta aceptar que hay algo que no hacíamos bien: «Ya sé que lo algebraico quedaba relegado a la «resolución de ecuaciones" en la formación profesional fuera del bachillerato. Pero, entonces, sólo me falta eso, ir aún más despacio»... La enseñanza secundaria obligatoria hasta los 16 años, pone de manifiesto -entre otros- un problema de «falta de ganas del alumnado» de forma muy especial. Para casi la mitad de un grupo de 30 estudiantes el estudio algebraico, como se estaba planteando, no le dice nada. ¡Y lo difícil es que los profesores aceptemos que esto es verdad!

Este cambio de opinión parece que sólo se acepta cuando se «sustituye» por otra nueva. Así, en una cultura escolar urbana europea del «estado de bienestar», diversas experiencias y/o investigaciones han mostrado que el reconocimiento de un «nuevo» valor aritmético-algebraico se fundamenta en la expectativa de satisfacción de *conocer la utilidad* por encima de la comprensión. Así, podríamos interpretar el porqué en ambientes familiares de nivel académico alto, eso de «el álgebra va a ayudar a saber expresar el porqué» ya no surte efecto. Sólo en el ámbito de los profesionales de la enseñanza se dan motivaciones por la comprensión per se. Ahora más que nunca se dice: «Claro, como es hijo de profesor, por eso se interesa». En efecto, la única satisfacción que quedaba antiguamente a los estudiantes era la de decir: «Ya no me equivoco con los paréntesis» o bien «Por fin conseguí aprenderme la fórmula» o incluso «El profe dice que ahora puedo hacer los problemas porque me fijo más en los signos». Pero eso no mueve a un conjunto de alumnos para los que las perspectivas del futuro próximo no están puestas en estudios universitarios técnicos o científicos. Ese es el nuevo desafío para el profesor: saber deja de ser la clave. Reconocer procesos es más importante.

Es difícil reconocer que se requiere una reflexión profunda centrada en el profesorado más que en los propios estudiantes. El profesor o profesora espera recibir en los cursos de formación. Asiste ávido de respuestas concretas... «¿Qué puedo hacer -dice- no sólo no saben hacer los problemas como antes. Ahora tampoco resuelven la mecánica». ¿Qué ocurre? Cuesta mucho aceptar que por encima de todo hay un problema que radica en que el propio profesor no se fijó en mejorar el sentido y otorgar significado. Con todo, vemos que los problemas, desde la perspectiva de los estudiantes, son similares en diversos países, pero no desde los profesores. En lugares como Brasil, donde la formación matemática del profesorado de matemáticas de 12-16 es floja, y no menos la de 6-12, las actuaciones deben ser diferentes a las de un país como España, donde el profesor es un «matemático» que espera mucho de sus alumnos... Este tema continúa abierto.

RECONOCER SENTIDO Y SIGNIFICADO

Volvamos al qué hacer. ¿Qué es eso de poseer sentido aritmético-algebraico? ¿Es lo mismo que lo que se dice de aprendizaje significativo? observemos que, mientras se habla de «sentido numérico» como algo novedoso para justificar que debe valorarse la aproximación y estimación (Sowder, 1992), es fácil oír hablar de no olvidar el «significado de la idea de variable» (Schoenfeld; Arcavi, 1988), o «reconocer sentidos para los símbolos» (Arcavi, 1995). Como si se tratara de dos cosas completamente diferentes, el sentido parece que es «propio de los objetos» en sí mismos y el significado aquello que pasa por los individuos. El sentido común, sería lo que el contexto cultural acepta como normal y razonable en dicha caracterización... que no precisa de muchas explicaciones. En la reflexión semiótica, sentido posee dos niveles: el que sirve para designar los objetos, y el que permite expresar las propiedades, relaciones o sentimientos relativos a los objetos. Significado implica interpretación (Duval, 1995). Lo cierto es que el sentido se encuentra también ligado al individuo, en cuanto integra posibilidades existentes del contenido, y también es cierto que pasa por otorgar significados.

Un estudiante no adquiere sentido numérico por el hecho de conocer o saber que hay que dividir cuando se encuentre con una situación de agrupación, y saber teóricamente que el resto de una división es «lo de abajo» de la división. Lo que otorga sentido numérico es el hecho de saber contarle a otro compañero de su clase -por ejemplo- *por qué es mejor* dividir que hacer otra cosa; *quizás* se pudiera aproximar mediante un cálculo mental; quizás se pudiera hacer un razonamiento que permitiera resolver el problema sin hacer ninguna operación... Por ejemplo, no precisamos dividir para saber que al colocar 567 personas en botes de salvamento de 20 personas, uno de ellos tendrá menos de 20; si se llenan, al final quedarán 7 en el último, etc. Los estudiantes quizás saben que al dividir por 10 sobran 7, el sentido numérico debe permitir que los estudiantes sepan que en grupos de 20, también, pero si fueran 557 no sobrarían 7 sino 17.

Del mismo modo, un estudiante no adquiere un sentido algebraico sin haber otorgado significados a situaciones diversas, con preguntas básicamente en las que se plantea una situación generalizadora. dos cafés y tres palmeras costaron 500 PTA. ¿Puedo saber cuánto cuesta un café y una palmera...? ¿Y si fueran cuatro cafés y seis palmeras...? ¿Por qué? ¿Y si supiera que un café menos y una palmera más hubieran costado 50 PTA más? ¿Y si fuera...? ¿Cómo saber si esto es cierto para cualquier otro caso? Observemos que esa generalización no tiene por qué provenir de la aritmética o del lenguaje aritmético. Puede provenir de lo inductivo de una fórmula, pero *también* de lo general de una situación geométrica: «En todo paralelogramo, las diagonales son iguales y se cortan por el punto medio». Lo interesante es que lo algebraico «escolar» se relaciona sólo con situaciones aritméticas, pues a nadie se le ocurre formalizar simbólicamente la frase anterior. Nos conformamos con escribirla en lenguaje usual.

El sentido numérico es ese «oler» (siguiendo la metáfora de la salud) *qué aplicar de lo que sé* de los números a las situaciones (es decir: implica saber, saber hacer, saber justificar, pero también saber decidir), el significado va de las situaciones a los números y se basa en reconocer e interpretar qué y cómo entiendo algo de una situación o cómo veo lo que tienen en común varias situaciones. Por ello, el sentido numérico implica poseer:

- Un *conocimiento estratégico* (reconocimiento de datos, adecuación de datos y resultados, valoración, juicio, razonamiento...),
- *Conocimiento de sistemas instrumentales de realización* como el cálculo mental, los modelos gráficos, el uso de la calculadora,
- *Dominio de significados y control del sistema numérico* (magnitud relativa, cardinal..., referencias como línea numérica o multibase..., estructuras multplicativas o aditivas..., relaciones...),
- *Operativo* (efectos de una operación, estrategias de cálculo exacto y aproximado).

Pero no se produce sentido si no se desarrolla:
- *Control de actitudes y valores* (aplicabilidad, integración, juiciosidad, eficiencia),
- *Aplicación y consciencia* (multiplicidad de estrategias, métodos e instrumentos diversos, diversidad de las posibles soluciones, razonabilidad de los resultados, facilitación de los métodos...).

El sentido algebraico implica un esquema similar, donde los conocimientos estratégicos son análogos pero los instrumentos son diversos: métodos de resolución de ecuaciones, tanteos numéricos o sintéticos (dependiendo de la situación), etc. La identificación de conceptos como: igualdad, variable, incógnita, pueden contextualizarse y materializarse en situaciones estructurales diferentes (parte/parte/todo, superficies, problemas árabes, discos y cintas...) y el control del sistema operativo comprende lo conceptual de las estrategias de resolución funcional, gráfica, matricial... Llenar de sentidos no sería importante. Potenciarlos sí. Pero no se adquieren sentidos sin otorgar personalmente significados. Y eso precisa investigaciones.

ÁLGEBRA Y ARITMÉTICA

Finalmente, podemos decir que producir un concepto de sentido numérico que extrapole lo tradicional, depende de comprender más profundamente la relación entre álgebra y aritmética. No podemos seguir basando reflexiones en esta área sobre una concepción que apenas, o principalmente, está viendo el álgebra como aritmética generalizada. Es preciso comprender qué conocimientos algebraicos o aritméticos derivan su sentido de su participación en la organización de actividades humanas, y que aunque esa actividad englobe también reflexiones matemáticas «puras», no se restringe a ellas. Esto implica fuertemente la necesidad de examinar el papel de las características de los conocimientos algebraicos y aritméticos desde el punto de vista de cómo participan de aquel proceso de organización, esto es, del proceso de producción de significado.

En cuanto a lo dicho sobre que en una primera observación la aritmética se caracteriza por los procedimientos sintéticos y el álgebra por los analíticos, también es cierto que un cierto sentido «puramente» numérico lleva, o informa, al análisis, de la misma forma que el análisis estructura la síntesis. Si la actividad algebraica se concentra en examinar situaciones genéricas -por la preocupación de proporcionar instrumentos eficientes para estructurar la síntesis-, es precisamente esa síntesis la que proporciona un objetivo al análisis. En ese contexto, queda claro cómo el álgebra no puede ser vista como un fin en sí (es decir, como un contenido), tampoco por cuestiones de «motivación» (porque a los alumnos «no les gusta»), y sí, en cambio, por ser un grave error de comprensión epistemológica.

El álgebra y la aritmética se diferencian, por lo tanto, por ciertos aspectos característicos que poseen, relacionados con las formas de producción de significado que están privilegiando. La dualidad análisis/síntesis es uno de dichos aspectos. Sin embargo, no deberíamos olvidar, que ambas (álgebra y aritmética) acaban refiriéndose a relaciones con números, operaciones aritméticas e igualdades (desigualdades), componiendo un cuadro general en el cual el valor fundamental es la complementariedad y no la jerarquía de una sobre la otra. Es desde este punto de vista que el desarrollo de un sentido numérico amplio no puede prescindir hoy de elementos proporcionados por el álgebra y la aritmética -en particular en un mundo con una gran riqueza de informaciones cuantitativas que precisan ser tratadas y organizadas si queremos que sean de algún valor.

Referencias bibliográficas

ARCAVI, A. (1995): El sentido de los símbolos. Generación de intuiciones en matemática formal. En *Actas de las JJAEM* SPM, 77-83. Madrid: Emma Castelnuovo.

DUVAL, R. (1995): *Sémioses et pensée humaine.* Peter Lang Neuchatel.

LERNER, D; SADOWSKY, P. (1994): El sistema de numeración: un problema didáctico. En C. PARRA e I. SANZ (comps.) *Didáctica de las Matemáticas,* 95-184. Buenos Aires: Paidós Educador.

LINS, R. (1992): *A framework for understanding what a semantic field is.* Tesis inédita. Shell Center for Mathematics Education. Univ. of Nottingham. UK.

LINS, R; GIMÉNEZ, J. (1996): *Didática da aritmética e da algebra.* São Paulo: Atual.

PICATOSTE, F. (1862): *Vocabulario matemático-etimológico.* Madrid: Lib. de D.E. Aguado.

PIRIE, S. (1994): Mathematical understanding: always under construction. En JP PONTE, F. & MATOS (eds) *Proceed. PME XVIII* Lisboa vol. 4, 49-56.

SCHOENFELD, A; ARCAVI, A. (1988): On the meaning of variable. En *Arithmetic Teacher* 88, 420-427, septiembre.

SOWDER, J. (1992): Estimation and number sense. En D.A. GROWS (ed) *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning,* 371-389. Nueva York: MacMillan Publishing Company.

Referencias de los autores

Rómulo Campos Lins, profesor del Dept. de Matemática. UNESP Río Claro. Brasil. E-mail. romlins@rcb000.uesp.ansp.br. Actual presidente de la Sociedad Brasileña de Profesores de Matemáticas.

Área de interés: Didáctica y Epistemología del Álgebra.

Joaquim Giménez, profesor del Dept. Enginyeria Informàtica Rovira i Virgili. Ctra. Valls s/n 43007-Tarragona. E-mail jgr@tinet.fut.es

Área de interés: Formación del profesorado. Didáctica de las Matemáticas.