Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI

Tradicionalmente, a álgebra escolar é vista como uma generalização da aritmética. Mais ainda, esta é vista como concreta (e, *portanto*, mais fácil), e aquela como abstrata (e, *portanto*, mais difícil).

Neste livro buscamos mostrar que essa visão é inadequada em alguns aspectos e errada em outros. Considerando a álgebra e a aritmética como duas faces da mesma atividade – lidar com relações quantitativas –, exploramos a inter-relação da aprendizagem de uma e de outra, e de que modo isso sugere mudanças na educação matemática escolar. Propomos "desenvolvimento de um senso numérico" em vez de "aprendizagem da aritmética", e também "produção de significados para a álgebra" em vez de "aprendizagem da álgebra".

Talvez a melhor perspectiva para o século XXI seja aquela que nos permita viver em um mundo de transformações constantes e rápidas. Em vez de conteúdos apenas, é preciso desenvolver a capacidade para aprender e compreender.

4ª Ed.

ISBN 85-308-0450-3

9 788530 804503

PAPIRUS EDITORA

Romulo Campos Lins e Joaquim Gimenez

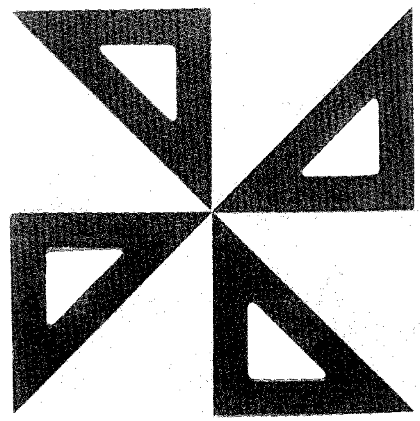
PERSPECTIVAS EM ARITMÉTICA E ÁLGEBRA PARA O SÉCULO XXI

PAPIRUS

Romulo Campos Lins
Joaquim Gimenez

Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI

4ª Edição



perspectivas em educação matemática

PAPIRUS

Romulo Campos Lins, nascido em 1955, licenciou-se em Matemática no IME-USP em 1986, e completou seu PhD em Educação Matemática no Shell Centre for Mathematical Education (Nottingham, Inglaterra), 1992.

Atualmente trabalha no departamento de Matemática da Unesp-Rio Claro (SP), onde participa também do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (mestrado e doutorado).

Em 1995, assumiu a presidência da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Joaquim Gimenez, nascido em 1952. graduou-se em Matemática em 1976, e obteve seu PhD em Filosofia e Ciência da Educação em 1991.

Foi professor do ensino básico espanhol de 1972 a 1981, quando tornou-se professor da Faculdade de Educação da Universidade Autônoma de Barcelona. Desde 1986, é titular de Didática da Matemática na Universidade Rovira y Virgili (Tarragona, Catalunha/Espanha).

É professor associado das Universidades Santa Úrsula (RJ), de Pilsen (República Tcheca), e de Maribor e Liubliana (Eslovênia). É membro do Comitê Internacional da Commission Internationale pour l'Étude et l'Amelloration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM).

PERSPECTIVAS EM ARITMÉTICA E ÁLGEBRA PARA O SÉCULO XXI

COLEÇÃO
PERSPECTIVAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A matemática está presente em todos os níveis da educação escolar, tem grande importância em várias outras áreas do conhecimento, como instrumento, e faz parte de nosso cotidiano na forma de noções como porcentagens, estatísticas, juros etc.

Portanto, ampliar e consolidar um espaço para discussão de temas de interesse para a Educação Matemática é uma ação de fundamental importância, sobretudo no que se refere a estreitar os laços entre a sala de aula, o desenvolvimento e a pesquisa.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), fundada em 1988, persegue tal meta, e esta série é um passo natural neste percurso: avançamos aqui em colaboração com a Papirus. O que se pretende é oferecer um conjunto de obras nas quais os processos da Educação Matemática sejam examinados e discutidos com amplitude ou, em outras palavras, oferecer textos que, abordando seus temas de maneira profunda, mantenham o compromisso com a necessidade de articulação das três áreas de atuação já mencionadas.

Alcançar o objetivo de favorecer um debate comum a toda a comunidade é o que moverá e guiará a existência desta série. Os interessados em submeter textos para eventual inclusão nesta coleção devem entrar em contato com seu coordenador pelo e-mail romlins@rc.unesp.br.

Romulo Campos Lins

ROMULO CAMPOS LINS
JOAQUIM GIMENEZ

PERSPECTIVAS EM ARITMÉTICA E ÁLGEBRA PARA O SÉCULO XXI

PAPIRUS EDITORA

Capa: Fernando Cornacchia
Foto: Rennato Testa
Copidesque: Mônica Saddy Martins
Revisão: Maria Lúcia A. Maier

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Lins, Romulo Campos
Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI / Romulo Campos Lins, Joaquim Gimenez. – Campinas, SP : Papirus, 1997. – (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

Bibliografia.
ISBN 85-308-0450-3

1. Álgebra — Estudo e ensino 2. Aritmética — Estudo e ensino 3. Matemática — Estudo e ensino I. Gimenez, Joaquim. II. Título. III. Série.

97-1350 CDD-513.12

Índices para catálogo sistemático:

1. Aritmética e álgebra : Educação matemática 513.12

4ª Edição
2001

Este livro é dedicado a Daniel e Emmanuel, pessoas com quem construiremos um mundo melhor.

Queremos agradecer a Mónica Villareal, pela tradução do espanhol, de partes do manuscrito.

SUMÁRIO

1
INTRODUÇÃO

Na comunidade da Educação Matemática, há poucas noções tão enraizadas como a de que aprender aritmética deve vir antes do aprendizado da álgebra, e só isso já justificaria o esforço de escrever um livro que analise e discuta essa noção. Neste livro vamos, entre outras coisas, mostrar que essa idéia é infundada, e, na verdade, *prejudicial*.

Para realizar essa discussão, optamos por inseri-la em um quadro mais amplo, no qual examinaremos algumas características do processo de produção de significados para a álgebra e para a aritmética. Esse exame vai permitir que identifiquemos de que modo aritmética e álgebra se relacionam, mas de forma diferente das leituras tradicionais, do tipo "álgebra é aritmética generalizada" ou "álgebra é a estrutura da aritmética". Essas são, de fato, interpretações possíveis, mas mostraremos que são estreitas demais para os propósitos de uma educação matemática. Em particular, pensamos que nossa perspectiva permite explicar o fato de que hoje a álgebra escolar representa o mais severo corte (momento de seleção) da educação matemática escolar, sem que para isso precisemos recorrer a noções como a de que sua introdução na 6ª ou 7ª série é precoce para a maioria dos alunos, que não teriam alcançado o nível de desenvolvimento intelectual requerido. Se isso fosse verdade, a única solução seria adiar a introdução da álgebra; essa solução foi adotada em outros países, na Inglaterra por exemplo, com resultados nada positivos.

Nossa leitura da produção de significados para a álgebra e para a aritmética sugere exatamente o contrário: *é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.*

Por outro lado, iremos explorar também a necessidade de uma leitura nova para o que seja próprio da educação aritmética e da educação algébrica no que elas têm de específico. Por esse motivo, e para podermos partir do que é mais familiar para a maioria dos educadores matemáticos, iremos estruturar os capítulos 2 e 3 separando álgebra e aritmética, embora não seja nunca uma separação completa. No capítulo 4, retomaremos a discussão comum das duas, tendo em vista o que está nos capítulos anteriores.

Essa estruturação busca evitar a impressão de que estamos propondo algo que não tem relação alguma com o que se fez até aqui, tanto em termos de pesquisa quanto em termos de práticas de sala de aula. Muito pelo contrário, nossa leitura desenvolveu-se com base naqueles dados, e como tentativa de responder perguntas que estavam sem resposta. Há uma ruptura, é verdade, mas ela se refere à compreensão que temos da educação algébrica e da educação aritmética, e não necessariamente a um abandono completo de tudo o que foi feito até aqui. Nossa leitura é, em grande parte, uma *releitura*, e não deveria ser de outra forma.

O capítulo 2 concentra-se na aritmética, e optamos por mantê-lo sempre próximo de uma discussão de conteúdos, embora não se resuma a isso, naturalmente. Essa escolha teve por objetivo discutir a necessidade de incorporarmos outros assuntos

à educação aritmética, pelos motivos que discutiremos. Não é que isso não seja também verdade com relação à educação algébrica, mas fazer essa discussão com relação à aritmética nos pareceu mais fácil, já que os exemplos são mais abundantes e de compreensão que requer menos detalhe técnico. A representação gráfica de quantidades pode ser imediatamente ilustrada por um exemplo, como o do consumo de bebida alcoólica em uma cidade européia, mas a idéia de tratarmos funções primeiro como gráficos, e daí elaborar uma "álgebra dos gráficos", requereria bastante mais detalhe técnico.

O capítulo 3 concentra-se na álgebra, e julgamos ser necessário ali um tratamento mais tematizado, uma discussão dos pressupostos por detrás das várias visões da atividade e da educação algébricas. Essa necessidade vem do fato de que parece haver muita resistência, na comunidade, em se reavaliar a posição da educação algébrica na escola, resistência bastante maior do que aquela que enfrenta a proposta de mudanças na educação aritmética: já mencionamos que a introdução da álgebra é o grande momento de corte na educação matemática escolar, e que a reação usual é deixar para depois, ao invés de antecipar essa introdução.

O perfil de cada um dos capítulos 2 e 3 deve servir para ajudar na leitura um do outro. Se, por um lado, é preciso um novo entendimento do que sejam os processos envolvidos na educação aritmética — entendimento em tudo similar ao que propomos com relação à educação algébrica —, por outro lado, é também preciso uma ampliação dos assuntos que envolvem atividade algébrica na sala de aula — ampliação que pode se guiar de perto pelo que sugerimos em nossa discussão da educação aritmética.

Ao final, no capítulo 4, buscamos fazer convergir de modo mais definitivo as conclusões dos capítulos 2 e 3.

"A aritmética e a álgebra constituem, junto com a geometria, a base da matemática escolar." Não apenas essa é a percepção da maioria dos educadores matemáticos, mas essa é de fato a realidade cristalizada nos livros didáticos e nas propostas curriculares.

Mas, afinal, o que é álgebra? E o que é aritmética?

Por um lado, fazer essas perguntas parece um tanto estranho. Coisas da álgebra são equações, inequações, funções etc., e as da aritmética são números, as quatro operações, tabuada etc. *Todo mundo sabe*. Mas há um problema naqueles *et cetera*: O que é mesmo que vem depois deles?

Por outro lado, para discutirmos o lugar da álgebra e da aritmética na escola e fora dela, precisamos ter pelo menos uma primeira caracterização. Vamos começar com o que dissemos no parágrafo anterior, e deixar os *et cetera* para mais tarde.

Números, quatro operações, tabuada: eis a aritmética.

Na rua, essas coisas são usadas para calcular preços, tamanhos e distâncias, tempos e volumes. Certamente na rua não usamos a aritmética com números "puros", eles são sempre *número de algo*, de reais, de metros, de litros, de quilos ou de horas, e por isso é pouco provável que nos defrontemos com a necessidade de multiplicar dois números grandes. Se forem medidas, iremos usar uma unidade mais adequada, quilômetros em vez de metros, por exemplo. Por um motivo semelhante, não vamos ter de fazer contas com números muito pequenos: se se trata de dinheiro, não pode ser menor do que um centavo, e, se for medida, não é provável que trabalhemos com precisão melhor do que um milímetro. Você pode estar pensando: Mas e nos laboratórios de física? E os químicos e engenheiros? Ora, laboratórios — científicos ou tecnológicos — *não são a rua*. Eles são lugares tão especiais quanto as anotações do matemático, e é importante entender isso.

Na rua, *de fato*, podemos estar seguros de que não vamos encontrar números menores do que um décimo de milésimo (0,0001) nem números maiores do que um trilhão, e neste último caso, jamais vamos encontrar "um trilhão, trezentos e vinte e cinco bilhões, cento e vinte e três mil, setecentos e um", a não ser que seja algum político tentando intimidar os ouvintes com o espantoso número de selos de dez centavos vendidos no último ano. Quando lidamos com números grandes, na rua (imprensa escrita e falada), importa mesmo a ordem de grandeza: mil, milhão, bilhão, trilhão.

Na rua encontramos, sim, números negativos — temperaturas negativas e saldo bancário negativo —, mas certamente não são os números negativos da escola. Temperaturas, por exemplo, não são jamais somadas (Qual o resultado de somar a temperatura de Fortaleza com a de São Paulo?), e menos ainda multiplicamos os números negativos da rua (Três abaixo de zero vezes cinco abaixo de zero? Débito vezes débito?). Muitos de vocês podem estar pensando: "Mas temperaturas e dívidas são bons recursos didáticos..." Sugerimos que o leitor que achou estranho o que dissemos anteriormente pare e reflita: Quando usamos como recursos as dívidas, e queremos produzir significado para (-3)(-5), não é verdade que o primeiro fator quer dizer "perder 3 vezes" e não "uma dívida de três"? Você acha que faz sentido multiplicar duas *dívidas*?

E as frações? Quantos de nós vão a uma loja comprar dezessete trinta e quatro avos de metro de tecido? É mais provável que compremos meio metro, e a diferença é *enorme*. A verdade é que as frações que encontramos na rua são todas muito simples. Se você trabalha com mecânica ou ferramentas em geral, é provável que lide com frações com denominador 2, 4, 8, 16, 32 e 64, mas para por aí (seria o caso, por exemplo, de jogos de chaves de boca, que costumam seguir o sistema americano de quartos, oitavos etc.); se você trabalha com preparação de tintas, é possível que lide com terços e quartos, mas não mais do que isso. Frações são muito raramente somadas ou subtraídas na rua, porque costumamos usar a representação decimal, bastante mais cômoda, e o mesmo podemos dizer da multiplicação de frações. Temos até mesmo uma notação especial para porcentagens, para evitar a representação por frações: 15% é, "na verdade", $^{15}/_{100}$ mas na hora de calcular 15% de R$ 32,00, nós fazemos a conta 0,15 vezes 32, e não a equivalente com frações. Não é de espantar que a representação decimal seja popular: historicamente, uma das razões para o enorme sucesso da representação decimal foi a facilidade que oferece na execução de algoritmos de cálculo, e hoje em dia calculadoras só operam com ela, a não ser algumas calculadoras especiais e de comercialização recente, que foram projetadas para... ensinar crianças a somar frações!

Para terminar em grande estilo: nenhum de nós espera encontrar na rua um número como $\sqrt{2}$, e menos ainda um número imaginário: Você já pensou que surpresa se o número da casa de seu amigo fosse $\sqrt{-256}$?

Precisamos insistir: não estamos dizendo que irracionais ou complexos não servem para nada, apenas que eles não estão na rua; e frações e negativos que estão na rua são *outros*, não os da escola.

Passemos às operações aritméticas. Na rua, onde elas são usadas para calcular valores que precisamos saber, tudo o que precisamos são maneiras seguras e eficientes de realizá-las: de preferência, uma calculadora, mas se ela não estiver disponível, algum método — possivelmente de cálculo mental — com o qual estejamos suficientemente familiarizados. Pode *até mesmo* ser um dos algoritmos da matemática escolar.

Quando somamos preços de cabeça, em geral, não respeitamos a ordem "da direita para a esquerda"; vamos juntando as quantidades, reais aqui, centavos ali, do jeito que pareça mais conveniente e fácil de ir lembrando os resultados. Se tenho de somar R$ 12,45 com R$ 0,75, é provável que eu "complete" os

R$ 13,00 no primeiro número, veja que sobrariam 20 centavos, e conclua que o total é R$ 13,20, mas, se quero somar R$ 12,45 com R$ 3,75, é provável que comece logo somando os três reais para me livrar deles.

Com as operações aritméticas na rua, precisão às vezes é importante, às vezes não: é mais do que suficiente saber que vou precisar de uns dois metros e meio de tábua, embora na hora de cortar as prateleiras eu vá me esforçar para medir direitinho, até os milímetros.

Já chega de aritmética na rua. E na escola?

Bem, na escola podemos ter números com infinitas casas decimais, e números maiores do que a quantidade de átomos em todo o Universo. Na verdade, podemos ter números de qualquer tamanho.

Números escolares sempre podem ser multiplicados, positivos ou negativos, racionais ou irracionais, *mesmo que às vezes não possamos fazer propriamente a conta* (pois há algarismos demais!), e todas as frações são igualmente significativas, seja $^{4}/_{5}$ ou $^{137}/_{235}$. Quando fazemos uma conta na escola, em geral, não basta um resultado aproximado, porque não há como saber se a aproximação está boa. Na rua podemos sempre ter uma idéia com base no uso que estamos fazendo de números, mas na escola o que se procura é o resultado exato, o que se consegue aplicando o algoritmo adequado. Mas pode ser um pouco confuso: se nos perguntam "qual é o número positivo que elevado ao quadrado dá seis?", respondemos "$\sqrt{6}$", e essa é uma resposta *exata*, embora também nos ensinem que há um algoritmo para extrair raízes quadradas — e, portanto, parece que ainda falta uma conta por fazer ali. Mas, se nos perguntam "quanto é $\sqrt{2}$ vezes $\sqrt{3}$" e respondemos "2,445" numa prova sobre "cálculo com radicais", a resposta — embora bastante boa do ponto de vista da aproximação numérica — está errada. Tudo indica que na escola interessa mesmo é que apliquemos "o" algoritmo, e de forma precisa.

Por fim, na escola, números não são números de nada, a não ser em "problemas com história", e no fim termina-se mesmo pedindo que os alunos se esqueçam da história e "pensem na matemática". A situação pode chegar ao cômico: em um livro didático brasileiro (e popular...) havia um problema envolvendo um porco que só tinha carne e toucinho, nada de ossos, couro, cérebro: o porco dos sonhos do produtor!

Tudo parece sugerir uma razão pela qual sempre ouvimos, de pessoas comuns, que boa parte da matemática escolar é inútil ou irrelevante, e talvez mesmo toda ela: é possível aprender na rua a maior parte da aritmética da rua. Não é que não haja aritmética na rua: é que ela é *outra*.

A aritmética escolar, hoje, embora plenamente justificada do ponto de vista dos significados matemáticos, parece não levar em conta necessidades da rua, embora muitas vezes se diga que sim. É preciso insistir que, embora os significados matemáticos sejam relevantes como parte do repertório das pessoas comuns, o que se constata é que mesmo especialistas da matemática ou da física, por exemplo, usam em seu cotidiano da rua métodos que não são os da matemática escolar; é bastante provável, por exemplo, que um matemático calcule o valor de um troco por meio de estratégias não formalizadas de cálculo mental, e não por meio da aplicação de um algoritmo escrito, embora também seja verdade que se houver necessidade ele vai saber aplicar o algoritmo escrito.

Essa flexibilidade do especialista é o que queremos que nossos alunos tenham, mas há um problema: o especialista é o que sobreviveu, independente do método que foi utilizado em sua formação.

Esse é um ponto extremamente importante: na verdade, há pessoas que alcançaram aquela flexibilidade por meio de uma educação a mais tradicional possível, outros pela chamada matemática moderna, outros por métodos como os de Montessori ou

Freinet, outros por meio de métodos construtivistas-piagetianos, e outros por qualquer abordagem que possamos imaginar. *Mas não são muitos.* O outro lado da verdade é que para muitas pessoas, a maioria, as escolas de todos os tipos continuam fracassando.

Quando falamos de fracasso, não se trata, naturalmente, de fracasso dentro dos muros da escola. Embora em muitos casos o fracasso seja completo, isso significando que o aluno não aprende o que a escola lhe propõe, há um outro fracasso, igualmente preocupante, que é a farsa de tantas pessoas que aprendem o que é ensinado na escola, mas apenas para a escola. Essas pessoas passam nas provas e nos exames escolares, mas não chegam jamais a alcançar o objetivo de integrar o que aprenderam na escola e o que aprenderam na rua, e quando acaba a matemática escolar — seja porque a pessoa pára de ir à escola ou porque segue uma carreira na qual não há matemática — acaba a razão de existir de tudo aquilo. Normalmente, dizemos que as pessoas "esquecem" o que aprenderam na escola, mas achamos que seria melhor dizer que elas nunca chegaram a se lembrar da matemática escolar fora da escola, *mesmo durante o tempo no qual estavam vivendo a matemática escolar*.

A breve olhada que demos anteriormente para as diferenças entre a aritmética da rua e a escolar sugere que cada uma delas envolve seus próprios significados e suas próprias maneiras de proceder e avaliar os resultados desses procedimentos, e sugere que essas diferenças acabam constituindo *legitimidades*, pois do mesmo modo que a escola proíbe os métodos da rua — em geral chamando-os de informais, e dizendo que são de aplicação limitada —, a rua proíbe os métodos da escola, chamando-os de complicados e sem significado, e dizendo que não são necessários na rua.

É preciso que a educação matemática reconheça que ambas as posições estão corretas, e o que isso quer dizer é que nossos alunos estão vivendo em dois mundos distintos, cada um com sua organização e seus modos legítimos de produzir significado.

Considerando-se esse ponto de vista, podemos dizer novamente que, quando acaba a matemática escolar, é simplesmente como se acabasse aquele mundo, que nunca teve relação com o outro. Insistimos: mesmo quando estão na matemática escolar, a maioria das pessoas não pratica essa matemática na rua.

Ora, o problema do educador matemático não pode ser simplesmente o de fazer com que pessoas tenham sucesso nesse mundo — a matemática escolar — que não sobrevive a dez minutos sozinho na rua, mas essa situação tem raízes profundas, e até no discurso que supostamente a discute ela se mostra dominante: quantas vezes — e com que veemência! — são pronunciadas as palavras mágicas "é preciso trazer a realidade para as salas de aula". Mas essa frase não parte exatamente do pressuposto de que a escola não é realidade?

O problema com esse pressuposto *ignorado* é que a idéia de trazer a rua para a escola transforma-se na idéia simplista de usar as coisas da rua para ajudar a fazer com que os alunos aprendam *a matemática da escola*, isto é, os significados não-matemáticos são vistos apenas como degraus na escada que "sobe" em direção aos significados matemáticos. Mas os exemplos que vimos, ligados às aritméticas da rua e da escola, deixam claro que os significados da rua são *diferentes* dos significados da escola, e não "versões imperfeitas e informais" dos significados matemáticos.

A alternativa que vamos defender é que o papel da escola é participar da análise e da tematização dos significados da matemática da rua — no caso particular da Educação Matemática —, e do desenvolvimento de novos significados, possivelmente matemáticos, que irão coexistir com os significados não-matemáticos, em vez de tentar substituí-los.

Essa nossa posição opõe-se, por exemplo, à idéia de que, ao trazer a rua para a escola, estamos "facilitando" a aprendizagem. Como já dissemos, um problema com essa idéia é que o que se quer facilitar é a aprendizagem da matemática da escola, e ela se

apóia na noção de que a matemática da rua é uma versão imperfeita da matemática da escola. Mas esse não é o único problema nem o maior. A *substituição* dos significados da rua pelos da escola significa subtrair a legitimidade dos significados da rua. Por exemplo, basear-se nos métodos de cálculo mental das pessoas para "ensinar" métodos da escola, é dizer sempre "você sabe alguma coisa, mas aqui está a versão correta e completa do que você está dizendo". A idéia de valorizar o que a rua sabe apenas como ponto de partida faz parte de um discurso que, embora pareça razoável do ponto de vista didático, é perverso do ponto de vista cultural.

❑ *De conteúdos a significados*

Quando consideramos o conjunto das coisas da aritmética que interessam à escola, e os significados que ela considera legítimos, reconhecemos imediatamente que boa parte da aritmética da rua não serve para ajudar a ensinar nada na aritmética da escola.

Por exemplo, olhar para a numerologia serve para ensinar o quê? E discutir a relação entre as notas dos juízes e a *performance* estética e física dos ginastas das Olimpíadas serve para ensinar o quê? Talvez alguém se sinta tentado a dizer que numerologia é bobagem, mas essa é certamente uma resposta superficial, pois o fato é que coisas da numerologia freqüentam o cotidiano de muitas pessoas — tanto quanto coisas da astrologia —, e os significados que são ali produzidos para os números são verdadeiramente *incomensuráveis* com os significados da escola. Na numerologia, o número 2 pode, por exemplo, significar o homem, e o 3, a mulher; que número você esperaria que representasse o casamento? Se pensou 5, acertou, mas não se engane: a noção central é a de união, e não a de adição.

A resposta padrão a essas considerações é que numerologia não tem nada a ver com aritmética, mas é essa resposta que expõe a verdadeira natureza do que está sendo afirmado: a numerologia não pode ser interpretada em termos da aritmética da escola, e é *por isso* que ela não serve para ensinar nada na aritmética escolar. E dizer que essas são apenas superstições não resolve o problema, pois nos Estados Unidos muitos edifícios não têm 13º andar, simplesmente porque é um número cujo significado envolve para muitas pessoas a noção de azar.

O problema que temos hoje está mal colocado. O problema da Educação Matemática não pode ser apenas o de descobrir maneiras melhores de ensinar a matemática escolar, mas também não basta decidirmos que a matemática escolar atual deva ser substituída por isso ou aquilo, não se trata de "novos conteúdos". Qualquer que seja a matemática que se institucionalize como escolar, o mesmo processo de fossilização acontecerá. O que precisamos é de uma perspectiva diferente, é preciso reconceitualizar o papel da escola.

De que forma a escola participa, hoje, do processo de organização das atividades da rua? Simplesmente oferecendo modelos prontos: se você tem de calcular o troco, faça a subtração adequada, e subtração se faz assim. Ora, qualquer bom profissional que seja chamado a ajudar uma empresa ou grupo de pessoas a organizar uma atividade vai, em primeiro lugar, procurar estudar as condições nas quais o problema está sendo colocado. Se o problema é ajudar pessoas a calcular troco, ele deve perguntar: "Há uma calculadora disponível? Você confia na pessoa que está retornando o troco? Você tem experiência de fazer contas de cabeça?"

A escola não pergunta nada disso, porque ela parte do princípio de que a *essência* do troco é a subtração do total pago (um número) menos total a pagar (um número), e que a maneira de se fazer subtrações é escrever um número embaixo do outro etc.. Mas essa é uma suposição completamente errada. Entre

numa loja onde não há aquelas caixas registradoras que fazem o troco automaticamente, e compre algo. Se a pessoa não fizer contas num papel — o que não é nenhum crime! —, e simplesmente for pegando o dinheiro para lhe dar, pergunte a ela, depois que o dinheiro estiver em sua mão, se ela sabe quanto tem ali. É provável que ela não saiba, e a explicação é simples: a atividade na qual ela se engajou foi a de "dar troco corretamente", e o procedimento usado foi "completar". Se você pagou com uma nota de dez reais, e a despesa foi de quatro reais e setenta e três, ela vai "completando" até chegar a dez: junta dois centavos e diz "quatro e setenta e cinco", mais cinco centavos e diz "quatro e oitenta", mais vinte centavos e diz "cinco reais", mais cinco reais e diz "dez reais", e lhe dá o troco dizendo "dez reais", o total alcançado, e não o total do troco. Ela não fez nenhuma subtração, e não há razão para que saiba o resultado de uma suposta subtração. O fato de que dispunha de dinheiro nessa atividade, permitiu que ela adotasse o procedimento que adotou, e provavelmente agiria diferente se você dissesse "estou com pressa e passo depois para pegar o troco". Tente fazer essa experiência você mesmo.

Vamos mudar um pouco de direção, e perguntar: Mas por que é que a aritmética escolar não muda?

Em primeiro lugar, porque há, cristalizada nos currículos tradicionais, uma visão do que é que se deve ensinar na escola. Professores são submetidos a uma enorme pressão dessa tradição, tanto sob a forma de currículos e livros-texto quanto sob a forma de uma pressão social persistente, mas ao mesmo tempo eles próprios foram educados desde o ponto de vista daquela tradição: a escola de 1º e 2º graus que freqüentaram, e a formação universitária que possivelmente tiveram, toda ela foi muito provavelmente baseada naquela tradição. Mas tradições não se sustentam por si próprias, com base apenas na idéia de que "sempre foi assim": é preciso que a tradição seja revestida de princípios justificadores para que possa resistir de forma eficiente à mudança. No caso da tradição da aritmética escolar, um dos princípios justificadores é que a aritmética escolar representa, na verdade, a *essência* da aritmética da rua. Nós já havíamos sinalizado para a existência dessa idéia, mas vamos agora proceder a um exame mais cuidadoso.

Tomemos, por exemplo, atividades comerciais. É bastante conhecido o fato de que em muitas sociedades o comércio de mercadorias é ou era feito com base em trocas. Nesses sistemas, a idéia de associar números às mercadorias — na forma de preços — não existe. Mas, hoje em dia, em nossa sociedade, isso é impossível. Em primeiro lugar, pela escala do sistema de trocas e, em segundo lugar, por sua complexidade, e é importante assinalar que essas duas caraterísticas são parte de uma certa forma de organização econômica, parte de uma certa ordem econômica. De maneira semelhante, há ou houve sociedades nas quais a contagem exata de quantidades grandes, no sentido de ter nomes para essas quantidades, não existe.

Certamente há uma visão, bastante comum, de que aquelas sociedades são "primitivas", no sentido de serem menos do que a nossa, de serem apenas estágios anteriores no caminho de serem o que *nós* somos. Essa visão é o correspondente exato, em termos culturais, da visão de que a matemática da rua é apenas um estágio primitivo da matemática da escola, e da mesma forma que existe a proposta de "trazer a rua para a escola", com a intenção de facilitar a aprendizagem da matemática da escola, podemos pensar em propostas que partiriam dos valores próprios de uma sociedade para fazê-la "progredir" na direção de ser como *nós* somos.

Podemos dizer que a matemática da escola não muda porque ela se acredita, de alguma forma, um estágio superior na linha reta do progresso humano. A matemática da escola é consistente, precisa e geral, ao passo que a matemática da rua, não: lá

podem ser considerados como legítimos métodos que são intrinsecamente imprecisos do ponto de vista da matemática escolar.[1]

A escola é, sim, lugar de tematizações, de formalizações. Esse é um papel importante que ela deve cumprir, o de introduzir as crianças em sistemas de significados que constituem o que Vygotsky chamou de conceitos científicos, e que correspondem a um corpo de noções sistematizadas. E também é verdade que o papel desses conceitos científicos é o de serem instrumentos nos processos que caracterizam as formas cognitivas tipicamente humanas. Em outras palavras, conceitos científicos são parte do processo de organização da atividade humana. Mas os conceitos da rua têm o mesmo papel, o de participar do processo de organização da atividade humana, o que sugere que sua exclusão da escola quer dizer que esta não está voltada centralmente para aqueles processos, e, sim, para alguma outra coisa, ou, na melhor das hipóteses, que acredita que apenas os significados matemáticos, os que a escola privilegia excluindo os outros, são instrumentos adequados ou corretos.

É importante observar que esse processo de exclusão da matemática dos significados não-matemáticos tem sua origem na matemática acadêmica, e não na escola.

Arquimedes, por exemplo, considerava os significados não-matemáticos tão relevantes para a matemática que dedicou a alguns deles um livro, o seu famoso *Método*. Diofanto, considerado por muitos o pai da álgebra, trabalhava com uma concepção de número, a de Aristóteles, na qual coleções de *coisas reais* — uma

1. Considere o seguinte método para calcular a área de um quadrilátero, método bastante popular em várias regiões do país: some os quatro lados e divida o resultado por quatro; agora multiplique esse número por ele mesmo, e obterá a área do quadrilátero. Esse método nos foi mostrado por nossa colega Gelsa Knijnik, da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Unisinos-RS), que por sua vez o aprendeu durante seu trabalho com a educação matemática no Movimento Sem-Terra.

noção nada matemática — têm um papel central. Poderíamos nos estender em exemplos semelhantes, mas é melhor tomar logo a idéia geral: não é verdade que a matemática acadêmica exclui sempre os significados que hoje chamamos de não-matemáticos. E para que essa frase não gere confusão, vamos torná-la um pouco mais precisa: não é verdade que os significados da rua sempre foram considerados ilegítimos pela matemática acadêmica. O processo de depuração que torna a matemática acadêmica impermeável aos significados da rua, como ela é hoje, começa em meados do século XIX e culmina, na passagem do século, com o programa de David Hilbert. Quase 40 anos depois, já completamente dentro desse espírito, começa o trabalho de Bourbaki, que vai dar tanto em noções fundamentais nas teorias de Piaget quanto no movimento da chamada Matemática Moderna.[2] Depois de completada a depuração, a matemática acadêmica pôde olhar para trás e dizer que *na verdade* os matemáticos sempre estiveram trabalhando com os significados matemáticos, embora estes estivessem muitas vezes mascarados.

A idéia geral é a seguinte: a matemática acadêmica trabalhava com um conjunto de afirmações, mais ou menos sem se importar com a origem dos significados, contanto que eles parecessem corretos e aceitáveis. A uma certa altura, começou um processo de tomar aquelas afirmações e de produzir para elas significados que não dependiam da rua. Por exemplo: números sempre foram vistos como emergindo de atividades como contar e medir, e nessas atividades seus significados foram produzidos. Depois que uma coleção de afirmações sobre números se estabelece, pode-se dizer "bem, *na verdade* números não têm nada a ver com contar e medir, eles são objetos abstratos, que *aplicamos* aos objetos concretos com os quais queremos lidar", e a partir daí produz-se um conjunto de princípios que definem *número*, e que não fazem menção alguma aos significados não-matemáticos; esses princípios definidores podem basear-se em conjuntos ou num princípio de construção por sucessores, mas nada de medida ou de contagem.

O processo é mais complexo do que pode parecer, pois, uma vez escolhidos os princípios definidores, é bem possível que terminemos caracterizando também objetos que não existem na rua, e um exemplo típico são os conjuntos infinitos. O problema começa quando queremos trabalhar com conjuntos infinitos com base nos significados da rua. Na rua, por exemplo, onde conjuntos são sempre finitos, não é possível que se retire um elemento de um conjunto e ele continue com tantos elementos quanto tinha antes, mas, com conjuntos infinitos, sim; a dificuldade está em que a idéia de "tantos quanto", que no caso de conjuntos finitos se resolve por contagem, não se aplica a conjuntos infinitos — como contar um conjunto infinito? Um outro exemplo, do qual já falamos, é o da multiplicação de números negativos, que só se resolve, depois de um longo período de tentativas e debates, quando a matemática acadêmica assume que definitivamente não há significado na rua para a multiplicação de números negativos, e passa a buscar, então, um significado produzido com base nos princípios que permitem, na matemática acadêmica, a existência daquelas estranhas coisas, quantidades que são menos do que nada.

Um tal processo leva, naturalmente, a um sistema no qual se pode produzir significado para todas as afirmações anteriores — para as quais também existem os significados da rua —, mas também para muitas outras, novas, que não existem dentro dos sistemas de significados da rua. Não é estranho que se conclua, com certa naturalidade, que um sistema no qual você pode falar tudo que fala em um outro, e mais muitas outras coisas, seja

2. O objetivo desse grupo de matemáticos franceses era o de colocar toda a matemática clássica em bases estritamente axiomáticas e estruturais, e seu trabalho continua a ser um dos grandes marcos da matemática deste século, embora o projeto tenha sido praticamente abandonado por motivos diversos.

superior. O erro não está, é claro, em dizer que um é mais *abrangente* do que o outro em termos de afirmações para as quais se pode produzir significados, e, sim, em acreditar que dois sistemas são comparáveis só com relação às afirmações, sem levar em conta os significados produzidos para aquelas afirmações.

Para esclarecer esse ponto, vamos tomar o exemplo de uma criança e de um matemático que dizem, ambos, que "2 + 3 = 3 + 2". Visto apenas do ponto de vista da afirmação, devemos dizer que ambos compartilham um conhecimento, mas, quando examinamos os significados em cada caso, vamos descobrir que, para a criança, "2 + 3 = 3 + 2" porque "tanto faz como você coloca os dedos: se põe três dedos e dois dedos vão ser sempre cinco dedos", ao passo que o matemático vai possivelmente falar de uma propriedade dos números reais.

Um caminho proposto para superar essa dificuldade é dizer que não basta examinar a afirmação "2 + 3 = 3 + 2" de forma isolada, que é preciso estudar a rede de afirmações na qual ela se insere; para o matemático, ela provavelmente está relacionada com "a + b = b + a" e com "2,3 + 3,1 = 3,1 + 2,3", mas, para a criança, não. Examinar este tipo de ligações é certamente essencial, mas não basta: é preciso investigar, com base nessas ligações e em outras informações, quais são os significados envolvidos, e por que é que, para a criança, aquelas ligações não se estabelecem.

No caso de "a + b = b + a", é possível que essa afirmação não tenha significado algum, pois não é possível colocar a nossa frente uma quantidade indeterminada de dedos; no caso da outra afirmação, o argumento é semelhante: 2,3 *dedos*?

A conclusão é: o fato de que *nós* podemos interpretar o "2 + 3 = 3 + 2" da criança em termos de *nossos* significados não oferece garantia alguma de que a criança compartilhe esses significados conosco. A extensão natural desse argumento nos leva a concluir que, por mais que uma certa tradição diga assim, não faz sentido ver na matemática acadêmica a *essência* da matemática da rua.

"A rua" não se caracteriza primariamente pelas coisas que se faz na rua, e, sim, por seus significados próprios. Por exemplo, não é "fazer papagaios (pipas)" que caracteriza a rua, e, sim, os significados (da rua) que se produzem numa atividade que envolva aquela tarefa. Quando um arquiteto ou um físico fazem papagaios, é quase certo que os significados produzidos não sejam os mesmos, nem entre si nem com relação aos produzidos pela criança na rua. O que queremos dizer com isso é que não basta trazer para a escola a tarefa para produzir com base nela apenas significados da escola. Qual o sentido de dizer "Vamos fazer papagaios!" com a intenção única de falar de simetria, triângulos, cálculo de hipotenusas e de áreas, e — pior ainda — para terminar fazendo o mesmo papagaio de sempre? Alguns dos significados básicos que os papagaios têm na rua estão ligados à beleza e ao equilíbrio: Por que não colocar o desafio de fazer um papagaio diferente *mas que seja tão bom quanto o comum*? Numa situação dessas, é preciso discutir e explicitar: i) o que é que faz o papagaio comum funcionar; e ii) qual o "papagaio dos sonhos", o que envolve discussões sobre beleza, forma e tamanho. Num processo como esse, afirmações sobre a "geometria" do papagaio seriam feitas e possivelmente gerariam outras, abrindo-se a possibilidade da intervenção *legítima* do professor para trazer novas possibilidades. A noção de equilíbrio, por exemplo, que na rua costuma ser a de um equilíbrio dinâmico — o papagaio fica bem "balanceado" quando é pendurado pelo tirante — pode ganhar novos significados, possivelmente matemáticos, na medida em que novas formas são propostas.

A combinação da exploração do item (i) acima com a intervenção legítima do professor é o elemento básico para que se constitua um conjunto de instrumentos que vão participar da organização da atividade de produzir novos papagaios.

Essa concepção deve fazer parte da base de uma proposta para a educação matemática: álgebra, aritmética e geometria vistas não como conteúdos justificados por sua própria existência, mas como instrumentos que participam da organização da atividade humana. Dessa perspectiva, o estudo da matemática desprendido temporariamente de quaisquer problemas fora da matemática passa a ter um sentido diferente, o de estudar e aprimorar as ferramentas de que se dispõe, e nesse processo a matemática torna-se objeto e não mais ferramenta.

Mas não há razão, tampouco, para que a introdução de significados matemáticos (ou, como diria Vygotsky, conceitos científicos) exclua da escola os significados não-matemáticos, já que o papel que uns e outros cumprem é o mesmo, como parte da organização da atividade humana. Trabalhando apenas da perspectiva de que significados matemáticos são absolutamente superiores aos significados não-matemáticos, a escola tem tido o efeito de estreitar as possibilidades cognitivas dos alunos, quando deveria ampliá-las; o fato de que significados matemáticos sejam mais gerais ou mais "poderosos" não é o que está em jogo aqui: o que queremos é que nossos alunos sejam *também* capazes de trabalhar com significados matemáticos, mas não apenas com eles. É apenas com base na coexistência de significados matemáticos e não-matemáticos na escola que se poderá constituir uma legitimidade comum, o que pode, por sua vez, impedir que a matemática da escola seja percebida como inútil, um saber cuja razão de ser deixa de existir quando termina a escolarização que envolve matemática.

Tomemos agora essa idéia de coexistência e façamos uma transposição para o caso da aritmética e da álgebra; a coexistência das duas permitiria que: i) a álgebra fosse vista como falando de afirmações que envolvem — assim como a aritmética — números, operações aritméticas e igualdades (desigualdades); e ii) que a aritmética fosse vista — assim como a álgebra — como uma ferramenta que toma parte do processo de organização da atividade humana.

O ponto (ii) sugere que já não pensemos na aritmética como uma ferramenta apenas para efetivar passos necessários nessa organização. Os métodos aritméticos — seja por meio de significados não-matemáticos ou matemáticos — constituem sempre um sistema que organiza, ao mesmo tempo em que se originam de uma certa organização da atividade.

Certos significados para a aritmética da rua originam-se, por exemplo, no fato de termos um sistema monetário que é como ele é — um sistema histórico e material; por outro lado, esse dado básico do sistema monetário deve ser *genérico* em algum grau, para que possa servir de sustentação para métodos confiáveis. O que queremos dizer é que a aritmética "do dinheiro" deve ser constituída em torno de princípios gerais — assim como a aritmética escolar. Só que são princípios diferentes dos da aritmética escolar, significados diferentes. Ora, com base nessa idéia, seria perfeitamente possível pensar em uma álgebra do dinheiro, tanto quanto pensamos em uma aritmética do dinheiro.

Vamos esclarecer esse ponto. Uma álgebra do dinheiro seria, antes de mais nada, um conjunto de afirmações *genéricas* sobre quantidades para as quais se produziria significado com base no que o dinheiro "é", em como é um dado sistema monetário, ao passo que uma aritmética do dinheiro seria um conjunto de afirmações a respeito de como efetuar certos cálculos, para as quais se produziria significado com base no que o dinheiro "é", em como é um dado sistema monetário. O fato de que existe esse *núcleo* comum — dinheiro — faz com que essa aritmética e essa álgebra tenham muito em comum: há uma *lógica das operações* em comum. Na aritmética do dinheiro, nós *praticamos* que tanto faz considerar primeiro o preço A ou o preço B, ao passo que na álgebra do dinheiro nós *dizemos* isso.

Há, na verdade, um jogo de primeiro e segundo plano: o que dizemos na aritmética deve poder ser dito de forma genérica — deve ter validade genérica —, ao passo que o que dizemos na álgebra deve poder ser dito em casos particulares. No caso que examinamos, há um fator que garante essa possibilidade: o *núcleo* comum, dinheiro, uma *lógica das operações comum*.

Mas, se alguém escreve afirmações num quadro-negro, e diz que agora tem de ser sempre da direita para a esquerda, o que isso teria a ver com os significados do dinheiro? Nada, e para sobreviver seríamos forçados a aceitar — sem "entender" — este novo significado: *é assim que estas coisas aqui funcionam.*

A questão central é que, em volta de núcleos como dinheiro, desenvolvemos um certo sentido numérico, um conjunto de percepções e intuições — se quiserem chamar assim — a respeito do que os números são ou como são (como funcionam, que propriedades têm). Nossas habilidades de estimar, de calcular com precisão requerida (numa atividade) ou de desenvolver métodos de cálculo, todas essas coisas dependem dos núcleos com base nos quais produzimos significado para números, quantidades. Mas o que isso quer dizer é que esse sentido numérico passa também pelas álgebras do dinheiro e outras, porque sentido numérico é uma coisa que se *expressa* nas decisões, mas *depende* da percepção genérica.

Nosso *sentido numérico* é construído com base em uma grande variedade de experiências com números. Na rua, esses encontros envolvem dinheiro, medidas, inflação, juros, multidões e contagem simples. Na escola, esses encontros envolvem identificar unidades, dezenas e centenas, e em trabalhar essas ordens "da direita para a esquerda", e envolvem somar "idades" e multiplicar negativos. Esse é o panorama, para uma pessoa que vai até a

5ª, 6ª série do 1º grau, esse é um possível conjunto de experiências que participa da construção de um sentido numérico.

Podemos colocar a questão em termos da formação desse sentido numérico: Em que medida a escola propõe a construção de um sentido numérico abrangente, ou a construção de um "sentido numérico escolar", incompleto do ponto de vista da rua? Ou será que o sentido numérico da escola corresponde mesmo à *essência* do sentido numérico da rua, sua versão aperfeiçoada? Quando falamos de diferentes significados, lançamos a base para tratar desse problema, e poderíamos talvez falar, também, de um "sentido algébrico".

No último capítulo, voltaremos a algumas questões apresentadas até aqui.

2
SOBRE A ARITMÉTICA

❑ *Tradição e novo século aritmético*

A aritmética encontra-se nos currículos do ensino obrigatório em todos os países, e há muito tempo. As "Aritméticas" são os primeiros livros que se publicam na matemática ocidental, e seu objetivo é ensinar essa "arte", que contém originalmente regras e técnicas; a força do binômio cálculo-números dura da Antiguidade à Idade Média. Os conceitos aritméticos usados na educação matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Deram-se no passado duas visões: a extremamente formal ou a simplesmente manipulativa. Tem-se esquecido freqüentemente que a aritmética inclui também: a) representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos, que ampliam a idéia simples do manipulativo); b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades); e d) descobertas ou "teoremas" (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínio).

A aritmética do século XX oferece respostas a problemas teóricos abertos, muito recentes. Entre eles, a chamada matemática discreta (quem sabe a "nova aritmética"), com a criptografia, os problemas de minimização e exploração máxima na economia, a análise numérica, os problemas de iteração etc. Por que reduzir então a aritmética a regras escolares? Por que reduzir a aritmética aos números naturais? Neste capítulo, propomo-nos a mostrar a situação atual e do passado recente em relação à aritmética: a) Que mudanças se produziram? b) Que relações têm com o meio? c) Como julgar a tradição no tema, de forma que possamos justificar alguns primeiros princípios para uma mudança na concepção curricular aritmética no século XXI?

O desenvolvimento habitual do ensino-aprendizagem da aritmética nas salas de aula deixa de lado muitos pontos importantes revelados pela pesquisa. Assim, a seguir, refletiremos sobre o que está ocorrendo nas salas de aula; aqui não nos afastaremos muito, ainda, dos números. Analisaremos concretamente: 1) a perda do valor central do sistema de numeração decimal; 2) o valor intercultural do fato aritmético e suas relações com o meio; 3) a necessidade de relativizar o valor teórico conceitual de temas "clássicos" (como é o caso da divisibilidade); 4) o novo sentido funcional do numérico; 5) as novas visões integradoras que permitem falar de problemas diversos com um mesmo tipo de técnicas.

1) *O sistema de numeração e as "regras" para resolver problemas práticos têm sido enfatizados demais em nossas aulas, por causa de uma interpretação superficial da história.*

O sistema de numeração decimal não é tudo que se deve levar em conta no ensino da aritmética. É necessário considerá-lo, mas não é o fundamental. Se falamos das culturas da Ásia Menor, diversos autores têm mostrado como, nas épocas babilônica e suméria, os elementos numéricos (cálculos) ficaram nas mãos dos escribas, ao passo que os sacerdotes assumiam estudos mais teóricos, de onde surgem diversos trabalhos de importância,

como a resolução de "problemas como equações de 2º grau", conhecimento de propriedades como o "quadrado da soma", a vinculação da idéia de fração ao sistema de numeração e o conhecimento de propriedades do cálculo de frações (vinculado aos cereais).

O sistema métrico decimal era importante na educação matemática do século XIX, porém, agora, o importante para o século XX é a descoberta e a generalização de suas propriedades, mais do que aquilo que de conceitual o sistema levava consigo.

2) *É evidente a lentidão do processo de aquisição aritmética em todos os âmbitos.*

É conveniente não esquecer que ele se realiza em diversas culturas e se desenvolve continuamente de forma simultânea nos diversos campos numéricos. Ou seja, desenvolvem-se ao mesmo tempo a aritmética dos naturais e as frações. Os quipos e os dedos, os palmos, *yupanas*, *soroban* japonês, cauris, ábacos etc. desenvolvem tanto o trabalho com naturais como com outros elementos numéricos, envolvendo diversos tipos de pensamento: proporcional, aditivo, gráfico etc. O ensino da aritmética tem-se preocupado demasiadamente em transmitir velhas histórias sem atualizá-las. Tal é o caso da grande influência de questões de divisibilidade elementar, os quadrados mágicos e as ternas pitagóricas. Tudo isso fez com que se esquecesse de um aspecto importante, que é indicar a origem dos problemas que deram lugar a esses conhecimentos aritméticos: cálculos de cereais, observações zodiacais, terrenos. Com freqüência, tem-se ignorado que os algoritmos de adição de frações foram vinculados a divisões de heranças, que o desenvolvimento dos sistemas métricos e das primeiras idéias sobre proporções surge da harmonia musical e arquitetônica e que as representações de quantidades grandes aparecem junto com a melhoria dos cálculos de fenômenos naturais: astronomia, agricultura etc.

3) *Está-se superando a síntese de conhecimentos como base de currículos terrivelmente teóricos e abstratos nas aulas.*

Essa também é uma interpretação insuficiente das sínteses matemáticas da primeira época grega. A aritmética e a geômetria se inter-relacionam claramente, e isso não é posto de manifesto. Assim, apresentam-se regras aritméticas teóricas sem suas imagens geométricas. Por exemplo, para medir o comprimento de um objeto, aplicamos (conceito geométrico) uma unidade, e calculamos (aritmético) quantas vezes a contam. Mas, para isso, temos duas técnicas possíveis: fracionar a unidade ou estabelecer um processo de comensurabilidade (desenvolvimento das frações). Por que freqüentemente se vê só uma delas? Assim, dá-se como difícil a idéia de *proporção*, que amplia a idéia das frações egípcias como partes da unidade. De fato, os currículos têm esquecido aspectos tão importantes dessa relação aritmética-visualização geométrica como: a) analisar propriedades aritméticas dos naturais por meio de descrições com base em modelos geométricos: números primos, quadrados etc.; b) aproximações de raízes e irracionais; c) aproximação associada à idéia de medida e técnicas de iteração associadas; d) visualizações que permitem reconhecer técnicas de cálculo de volumes de corpos (cilindro, esfera) etc.

A cultura ocidental tem esquecido que as descobertas matemáticas não são somente dedutivas, mas, fundamentalmente, práticas e indutivas. Nossos esquemas dos livros atuais não estão considerando aspectos importantes como: a) interesse crescente pela astronomia equatorial e calendário; b) origens do cálculo algébrico e divisibilidade; c) conhecimento de problemas pitagóricos. Embora seja verdade que os métodos dedutivos vêm a revolucionar a ciência, também é verdade que se tem abusado muito deles.

Um exemplo ilustrativo pode ser o reconhecimento da "lei de Bode" com estudantes de 13-14 anos. Com base na observação dos dados das distâncias dos planetas ao Sol, tomando a distância Terra-Sol como unidade, pode-se reconhecer a aproximação de

Bode, que "intui" a existência dos asteróides. Assim, vê-se uma seqüência de distâncias do tipo Sol-Mercúrio = 0,39, Sol-Vênus = 0,72, Sol-Marte = 1,52 , Sol-Júpiter = 5,2 ; Sol-Saturno = 9,54. Se a série aproxima-se de 0,4 ; 0,7; 1 ; 1,6; 5,2; 10, pode-se ver que "cumpre" a lei de Bode $d = (3 .\, 2^{n-1} + 4) : 10$. A fórmula é válida para $n = 1,2,3,5,6$. Que ocorre para $n=4$? Pois aí estão os asteróides.

4) Deve-se considerar a influência histórica da física e suas observações, e a representação funcional dos fenômenos, numa visão mais aberta da aritmética. Entre outras coisas, isso implica o reconhecimento de várias estratégias possíveis para um mesmo problema, significados diferentes da idéia de número, introdução experimental da idéia de variável e reconhecimento de um sentido numérico.

Um grande conjunto de exemplos sobre o que dizemos surge do "tratamento da informação". Efetivamente, dar aos nossos alunos uma tabela com dados de população desde 1950 até nossos dias pode permitir análises do tipo: Como se explica o crescimento...? O que ocorrerá no ano 2010?...

Vejamos outro exemplo, na forma de jogo. Desenhamos um trajeto no qual deve-se lançar dois dados (B = branco e A = amarelo). O trajeto está marcado de tal forma que a ficha tem pontos de cruzamento com duas saídas. Aí há uma casinha que diz, por exemplo, B + A = 5. Ou seja, se os dados "cumprem uma certa condição" (um possível caso seria se sai B = 3, A = 2), avança-se por um caminho indicado por uma seta e, se não se cumpre essa condição, vai-se por outro indicado por outra seta. Segue-se assim e deve-se chegar a uma meta. O primeiro que chega, ganha.

Os trabalhos das primeiras aritméticas introduzem os "novos" números inteiros (Stevin, século XVI), propriedades numéricas (Fermat, século XVII), as simbologias algébricas, os logaritmos (Neper, século XVII) etc. Porém, parece que a única coisa que fica de tudo isso é a reflexão de tipo analítico que nasce com

Descartes (séculos XVI/XVII) e é deixada para mais tarde, por volta dos 15 anos. A "instituição escolar", e com ela a aritmética para ser ensinada, tem mantido, desde a época de Newton e Leibniz, uma distância com outras partes da matemática e com outras áreas do conhecimento.

5) A aritmética propõe um sentido integrador que permite resolver problemas diversos com um mesmo tipo de técnicas e não somente ensinar técnicas por si mesmas. Assim, as regras ou técnicas servem à resolução de problemas.

Um exemplo combinatório típico é o cálculo das diagonais de uma figura convexa de 213 lados. Evidentemente não há quem a desenhe! Então, devemos encontrar algum processo de resolução. O raciocínio de tipo funcional permite reconhecer a reversibilidade do problema : se o número de diagonais é ... de que figura estamos falando? As técnicas de contagem levam a diagramas, tabelas, generalizações etc., que são empregados em problemas geométricos, lógicos, estatísticos ou probabilísticos.

As aritméticas das escolas militares e mercantis incidem na inclusão de técnicas e processos exaustivos que esquecem sobretudo o próprio avanço metodológico da ciência; o professor tem de estudar a produção de conhecimento na história da matemática, e assim talvez incorporemos no futuro novas formas e novas idéias. O fato de que isso não é parte da formação inicial do professor é evidente, e as razões não serão aqui analisadas. Consideramos que o professor não deve esquecer os problemas da história e que pode, também, usar esses elementos na aprendizagem.

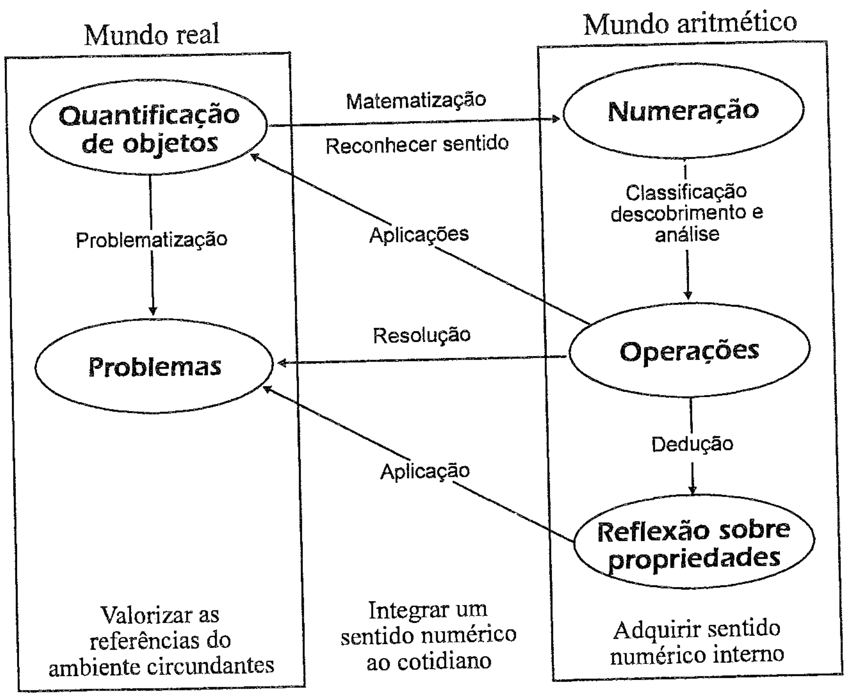
Além da história da matemática e da sua intervenção na formação das idéias científicas, temos de destacar o papel fundamental das relações entre a aritmética e o "mundo". Não podemos situar a aritmética escolar sem falar de onde surge e qual é o papel que o mundo real ocupa na produção aritmética escolar.

❑ *Aritmética, meio e números*

De onde sai a aritmética escolar? E os números? Primeiramente, queremos fazer uma reflexão sobre um novo *status* sociocultural dos referentes reais na aprendizagem da aritmética na escola obrigatória, inspirado pelos seguintes princípios: i) a aritmética tem trazido diversas contribuições à história e à cultura, como: a quantificação e o desenvolvimento de sistemas de agrupamento, a relação medida-números, a invenção de esquemas fracionários, a introdução de decimais etc.; ii) os instrumentos aritméticos têm atualmente um papel de diálogo que derruba barreiras: a linguagem universal da informática, o emprego de códigos numéricos, as frações simples em manchetes de jornais, as representações percentuais em "pizza"..., ou seja, os referentes têm — hoje mais do que nunca — um *status* comunicativo; iii) o reconhecimento de valores culturais próprios e, num momento de interculturalismo, a importância de reconhecer diversas culturas aritméticas. Como mostra Alan Bishop, entre as atividades básicas de todas as culturas estão contar e medir.

O observável de nosso meio é aritmetizável, o que nos permite reconhecer uma estrutura por meio de números e operações. Embora o mundo real proporcione as bases para esse sentido, este se consolida no momento em que se aplica o conhecimento adquirido a novas situações do mundo real. Isso não quer dizer que sempre se estabeleçam as relações adequadas e se associem sempre significados adequados aos conteúdos do mundo numérico. Assim, por exemplo, uma criança de 8 anos talvez tenha visto o símbolo 645, porém, não tenha consciência do seu valor numérico, mesmo morando no número 645 da rua de uma grande cidade, ou já tendo visto uma nota fiscal de 645 reais.

O conjunto de relações entre o real observado e o aritmético exprime-se no esquema da figura seguinte.



❑ *Princípios para um novo currículo*

Se a aritmética não é somente arte de regras e números mas "algo a mais"... se não está desvinculada do trabalho algébrico... se se percebe que o mundo real deve formar parte dos núcleos básicos... se isso ocorre, muitas coisas devem funcionar de maneira diferente nas salas de aula. Disso tiramos umas primeiras reflexões sobre o que deve passar a ser importante na aritmética escolar.

1) Antes de tudo e mais do que nunca, *reconhecer o valor social do aritmético e suas novas competências*: diversidade de métodos, capacidade de interpretar informações, competência de cálculo aproximado e mental mínima para enfrentar situações cotidianas de compra-venda, leitura de índices econômicos, estimando resultados possíveis. Observar a aritmética em sua capacidade de desenvolvimento comunicativo utilizando códigos, promovendo situações de tipo discreto entre outras. Isso implica: *deixar de pôr toda a ênfase na função de contar e reconhecer as funções de ordenar e medir dos sistemas numéricos.*

A numeração deve dar passagem ao sentido numérico do qual falaremos mais adiante. Trabalhar com os sistemas egípcio e maia, por exemplo, não deve ser considerado como uma moda no mundo comunicativo no qual vivemos. Isso implica ampliar a visão dos números como códigos de representação de realidades e valorizar o uso e o significado de muitos códigos não-numéricos. Por exemplo, as representações com letras em placas de automóveis e as representações numéricas em contextos não-numéricos: lanchonetes, prefixos de números telefônicos etc. Talvez o enfoque não deva ser — como no passado — contar isso aos estudantes, mas propor situações nas quais os próprios estudantes se sintam comprometidos: buscando informação, planejando "um dia matemático pelo Egito Antigo". As relações passado-presente são importantes no que diz respeito ao valor do sistema decimal, que se usa atualmente como um código a mais entre outros: medidores de gás e cores usadas para reconhecer as resistências em eletrônica são dois exemplos.

2) *Enfatizar os processos de aproximação e os problemas de iteração.* Em níveis mais altos, não esquecer processos como as aproximações de raízes de Teón de Esmirna, e o tratamento de π com um valor aproximado obtido empiricamente.

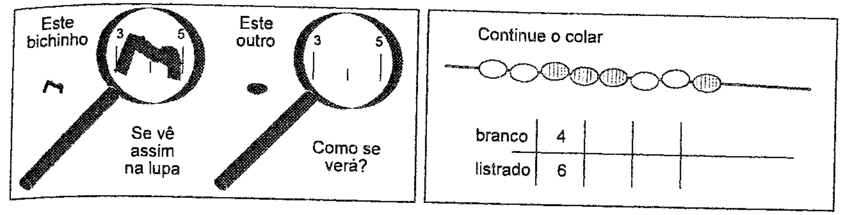
3) *O inconcebível de basear a aprendizagem em métodos somente algorítmicos, sem a proposição de problemas.* Isso piora quando se trata de explicar os algoritmos depois de tê-los dado. O estudante não entende nada, a aprendizagem não é significativa.

4) Reconhecer a possibilidade de generalização desde cedo; por exemplo, o trabalho de reconhecer padrões numéricos.

5) Reconhecer *distintos significados das frações e dos decimais*, que dão sentidos diversos à aritmética fracionária. Com efeito, a aritmética fracionária envolve elementos de medida e não somente a partição da unidade. Deve-se, então, produzir significado para as operações com frações desde aquela perspectiva, associando o denominador comum à idéia de unidade comum a duas medidas dadas, e que permite sua comparação e sua adição ou subtração. Um "pedaço" que indica um quarto, mais outro que indica dois terços devem ser compreendidos, antes de tudo, como a soma de pedaços que devem ser medidos com uma unidade comum, um terceiro "pedaço" que indica o doze avos. Mais ainda, pesquisas recentes mostram que se deve reconhecer que a partição da unidade (equivalência por subdivisão) não permite produzir significado adequado a toda uma gama de situações.

6) Considerar a *importância de ir apresentando o contínuo*, julgado por alguns como "muito difícil". O excesso de formalização dos anos 70 tem sido substituído por um currículo utilitário que pode fazer com que se esqueça de que o problema da completude está estreitamente vinculado ao da medida, e as aproximações devem ajudar a reconhecer esse processo fundamental na história da matemática.

7) *Enfatizar a idéia de proporção desde as primeiras fases.* O excesso de zelo no trabalho com frações tem afastado, nos primeiros anos do 1º grau, o trabalho com proporções simples como dobros, quartos, metades e três quartos para descrever situações. Trabalhar essas proporções em situações de observação de comprimentos: ampliação, redução, efeitos com lupa etc. O trabalho de Hans Freudenthal e de seus seguidores é fundamental no reconhecimento da fração como relação.

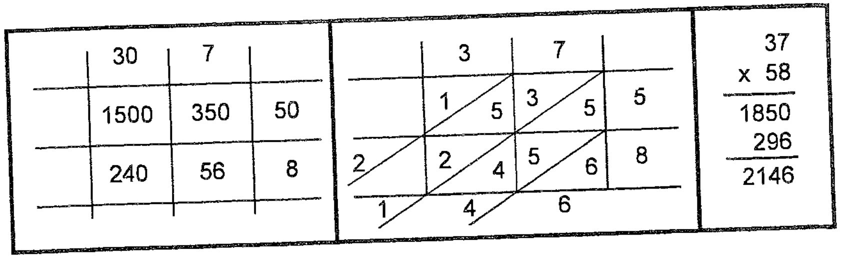


Situações de proporção em trabalhos de Freudenthal, Streefland e Van Heuvel.

8) Reconhecer o valor de analisar e justificar relações significativas dos elementos aritméticos (números e cálculo), mediante múltiplas representações e núcleos de experiência diferentes. Assim, nem sempre é fácil convencer os professores do valor do uso de ábacos, barras coloridas e outros materiais. É verdade que, para muitos, são "comprovadores" como as calculadoras. Não se usam porque se desconhece como tirar proveito de seu uso perante o modelo tradicional de papel e lápis. Algo similar ocorre com o cálculo mental. Acreditamos que nos professores ainda existe a crença generalizada de que somente o cálculo escrito é efetivo, e qualquer outra forma "distrai" e faz perder tempo. Por outra parte, os professores às vezes usam elementos manipulativos para "explicarem melhor", esquecendo-se de que o trabalho com cada material leva à produção de diferentes tipos de justificações. Assim, no caso das barras coloridas, alguém diz, "Vejamos como fazer 8 - 5", pega as barras de cor do 8 e do 5 e continua, "da barra de 8 tiro a de 5". A muitos professores surpreende que lhes digamos "pode-se tirar nas barras?" A resposta é evidentemente não. Então, por que diz?

9) Relativizar a importância dos algoritmos "dos manuais" como sendo a parte essencial do estudo aritmético. Fomentar o trabalho de descoberta de regras e técnicas mediante situações gráficas, visuais, experimentais etc., que não precisam ser as "usuais". Uma forma de fazê-lo pode ser reconhecer e reviver velhos algoritmos de compreensão simples, para refletir sobre eles acerca das propriedades que se manifestam.

Um exemplo ilustrativo do que se pode fazer nesse sentido seria reutilizar um método de multiplicação como o da grade. Nesse método, pode-se visualizar o poder da distributividade.



10) *Não desprender o cálculo e o trabalho aritmético em geral de enunciados vinculados a situações reais.* A própria sistematização da aritmética comercial parte de situações vividas em contexto habitual.

Com esses primeiros pontos, estamos em condições de explicitar alguns objetivos gerais de um trabalho curricular aritmético:

- Buscar a compreensão da quantidade e a observação e a manipulação de processos operativos.
- Fomentar a criatividade e a sensibilidade na busca de propriedades e relações.
- Conhecer, assumir e usar uma metodologia heurística, motivando a intuição para ajudar a formulação de hipóteses, generalizações e, em alguns casos, estratégias indutivas.
- Reconhecer processos dedutivos e iterativos usados na história, tentando reconhecer e identificar seus fundamentos, e reviver suas reflexões.

❑ *Raciocínio numérico*

Nesta seção serão discutidos os antecedentes de tipo psicológico que situam os erros e as dificuldades em situações aritméticas, assim como os tipos de pensamento diferentes que se relacionam com o aritmético. Não é suficiente dizer que na história da aritmética houve dificuldades para reconhecer que existem dificuldades na aquisição dos conteúdos aritméticos. Assim, perguntamos nesta seção: Que erros cometem nossos alunos? De que perspectivas e que tipo de dificuldades têm-se analisado? Que tipos de raciocínio estão envolvidos?

Existem diversos tipos de dificuldades específicas no trabalho com os números naturais. Entre outras: i) falta de sentidos diversos da contagem e valores diversos que se associem à idéia de número; ii) dificuldades específicas do sistema numérico associadas a agrupamentos ou decomposições. Outras são próprias dos distintos conjuntos numéricos como: iii) problemas de interpretação simbólica; iv) tarefas de ordenação e compreensão do valor relativo; v) dificuldades com a estimação; vi) erros associados à ineficácia operativa por falta de significação ou erros na execução de algoritmos clássicos.

Os naturais e suas dificuldades específicas

A ação de contar, tão fundamental no desenvolvimento aritmético inicial baseia-se em: reconhecimento de objetos discretos, relação entre aspectos de cada indivíduo com coleções do mundo exterior (contagem com os dedos), necessidade de uma noção que comunique informação sobre quantidades, medida discreta ou posição numa seqüência. A própria *noção de número* em forma abstrata representa um obstáculo para os alunos. E isso coincide, de novo, com um devir histórico que vai até o início do século XX sobre o significado do número.

A respeito do *valor relativo das quantidades*, Ginsburg identifica três fases: a) escrita correta sem raciocínio do porquê; b) reconhecimento de escritas errôneas, mesmo sem explicação adequada; c) relação adequada e correta entre a representação escrita e o valor relativo implicado. Uma dificuldade é a conceitualização do valor aproximado ou estimado de um número, entendendo o truncamento como algo mais do que uma técnica; os alunos "dizem" que 3.456 é próximo de 3.450, mas poucos identificam que 3.456 tem 345 dezenas. Outras dificuldades aparecem na *estimativa e na aproximação* de realidades e resultados de operações, o que não é de todo estranho, se pensamos que seu ensino não é usual.

Por outro lado, existe uma relação entre a compreensão de conceitos e a *eficácia operativa*. Ou seja, muitos dos erros cometidos pelos estudantes devem-se a uma débil *compreensão das operações que devem se associar a determinados problemas*.

As frações ... mais difíceis?

Com as frações e os racionais, boa parte dos erros observados podem ser creditados à transferência indevida de procedimentos válidos nos naturais, como se vê na tabela abaixo:

NATURAIS	FRAÇÕES	ERRO ASSOCIADO
A idéia de unidade oferece a possibilidade de ordenar quantidades. Ordenar é comparar situações, e falar de quem tem mais.	As frações, como quantidades e como medidas, ordenam-se da forma usual. A ordem nas frações-operadores não tem o mesmo significado; deve-se buscar um elemento de comparação comum.	Não se sabe dizer que suco vai ficar com sabor mais forte: 4 partes de suco para 6 de água, ou 5 partes de suco para 7 de água.
Há sempre um elemento seguinte (pseudo-arquimedianidade).	Não há a "fração seguinte" a uma fração dada; se se está no conjunto das frações unitárias, sim.	$\frac{4}{7}$ segue a $\frac{3}{7}$
Entre dois números naturais nem sempre há um outro.	Entre duas frações não-equivalentes sempre há uma outra.	Não se sabe encontrar um número entre 0,42 e 0,43.
Unidade, dezena, centena etc. oferecem pontos de referência que acentuam as relações aditivas.	As unidades "exatas" não são os únicos pontos de referência relevantes; é necessário saber usar unidades quaisquer.	Não se sabe aproximar $\frac{7}{8} + \frac{11}{12}$ e dizer que dá perto de 2.
4 é 3 mais 1, 5 é 4 mais 1.	As frações são relações multiplicativas.	regra de supressão de parcelas iguais: $\frac{3}{4} = \frac{4}{5}$, pois $\frac{4}{5} = \frac{3+1}{4+1}$
A divisão acentua o fato de "dois resultados": quociente e resto.	A fração-divisão acentua a idéia de quantidade: resultado = um número.	Repartir 6 pizzas entre 4 pessoas é o mesmo que repartir 8 pizzas entre 6 pessoas: cada uma recebe um pedaço e sobram dois...

No que diz respeito à *ordenação* e à *localização* dos números, as maiores dificuldades dão-se no campo das frações e dos decimais. A simbolização prematura de frações e decimais e a pouca insistência no valor variável da unidade em contextos diferentes, e o próprio fato de não se insistir em diversas situações possíveis, nas que se desenvolvem frações e decimais, são os fatores mais importantes de fracasso ou erro.

Os decimais e a escrita de posição

Calcule mentalmente 3.104 menos 200. O resultado errado pode ser 3.003 acompanhado da seguinte explicação: como não posso tirar duas centenas de 1, tiro a que sobra de 4. Seis décimos como decimal se escreve 0,6. Como se escreve três centésimos? Algumas respostas errôneas obtidas são: 0,300; 3,00; 3,100; 00,3. Esses erros indicam que o sistema de numeração decimal não foi dominado pelas crianças, que freqüentemente cometem esses erros.

O zero e a ordem entre decimais

O emprego do zero é um desses mecanismos que funcionam de distintas formas segundo a situação em que apareçam. Por exemplo, alguns alunos ignoram os zeros e interpretam 0,036 como 36, perdendo a estrutura global do número e vendo-o somente como um número inteiro. Outro exemplo: 1,27 se considera distinto de 1,270.

Vejamos o que acontece com a ordem. Se propomos às crianças ordenar do menor ao maior os números: 4,5, 4,15 e 4,05, a resposta mais freqüente é 4,05 > 4,5 > 4,15; se pergunta-se-lhes porquê, dirão que o menor é o que tem um zero, e logo 5 é menor do que 15. Os números decimais são interpretados como pares de inteiros, e ordenados por critérios que, em alguns casos, podem dar lugar a respostas corretas. Eis outro erro: Qual é o maior dos números 0,09; 0,385; 0,3; 0,1814? A resposta mais freqüente é 0,1814. Ou este novo erro: intercalar um decimal entre outros dois. Entre 1,23 e 1,24 não há nenhum número, 1,24 é *o número que se segue a 1,23*.

Brown e depois Hart, Kerslake e outros chegaram, nos seus estudos sobre erros dos estudantes, a conclusões como as seguintes: 50% dos alunos de 15 anos têm um conhecimento razoável, porém não completo, dos decimais, enquanto que os 50% restantes têm lacunas consideráveis, o que não significa que esses alunos não sejam capazes de utilizar corretamente os números decimais em situações concretas e familiares, como são a medida e as moedas. Têm-se encontrado todos os níveis de compreensão em cada um dos grupos de 12, 13, 14 e 15 anos, embora em proporções diferentes de ano em ano. Existe uma particular dificuldade na compreensão do centésimo, e isso sugere que muitos alunos precisam de modelos visuais de décimos, centésimos etc. para compreendê-los num sentido correto. É possível que os professores de alunos dessas idades pensem que as crianças adquiriram o domínio dessas idéias aos 11 anos, o que não parece ser o caso geral. As conclusões desse tipo de trabalhos destacam a necessidade de que o professor faça um diagnóstico minucioso do progresso de cada indivíduo, nas questões que envolvem o tópico analisado e em outros tópicos similares.

Vemos, assim, uma maneira de a pesquisa em educação matemática utilizar os erros, e que procede assim: *enumera* temas característicos do domínio escolar de um conceito, nesse caso, os números decimais; *elabora* um questionário que permite determinar o grau de facilidade ou de dificuldade de cada um dos aspectos que abarca o conceito; *consegue*, com isso, chamar a atenção do professor sobre a necessidade de diagnosticar o grau de conhecimento que cada aluno tem e a maneira de progredir que é própria dele; e *propõe*, finalmente, que se utilizem materiais que permitam concretizar o décimo, o centésimo etc.

❑ *Guerra de pensamentos*

Construir o conhecimento aritmético é um processo extenso que possui muitas facetas e se relaciona com tipos de raciocínio muito diversos. Por exemplo, uma visão chamada filogenética (conforme L. Steffe) identificou cinco etapas na construção da seqüência numérica simples: esquema perceptual, contagem figurativa, iniciação da seqüência, reconhecimento tátil e explicitação. Essa construção se assemelha à história cultural correspondente. Com efeito, o processo de atribuição dos nomes dos números assemelha-se a essa formação aparentemente tão simples na história: um (*un*idade), dois (*dua*lidade, duo = par), muitos, como já observou Karl Menninger. Um detalhe observado por esse autor é que, em inglês, também o dois é duplo: *two* (dois) e *twin* (gêmeo) são palavras perfeitamente semelhantes.

No entanto, a reinvenção da aritmética (em palavras de Constance Kamii) é um processo no qual intervêm ações muito diversas, das quais refletiremos, como síntese, dois aspectos distintos: os métodos ou os raciocínios mais usados e os tipos de pensamento mais analisados.

Raciocínio figurativo e intuitivo

Já na iniciação aritmética existe um raciocínio intuitivo no figurativo; diversos autores consideram que nisso consistem as primeiras fases da construção do conhecimento aritmético. O figurativo tem sido associado normalmente a elementos perceptivos, e corresponde ao reconhecimento da conservação da quantidade, reconhecimento da inclusão entre partes e todo etc. Seria o mais elementar.

Em situações mais complexas, no entanto, existe também pensamento intuitivo. As intuições desempenham um papel importante na construção de idéias complexas como é o caso dos números reais, por exemplo, mas também em geral. O conhecimento intuitivo reforça-se com experiências promovidas pela escola; por exemplo, recursos gráficos. Ao falar da importância do visual no numérico, faremos uma reflexão sobre esse aspecto do raciocínio.

Pensamento relativo e absoluto

O processamento da informação visual permite identificar informações absolutas. Tal é o caso da contagem. Como já é sabido, até três a percepção da quantidade é imediata; mais do que três requer algum processamento da informação visual. Se nos é apresentado um conjunto de pontinhos ou uma foto de uma manifestação, por exemplo, e não nos é dado muito tempo para contar, ficamos obrigados a desenvolver habilidades de estimativa, que não são próprias de um pensamento absoluto, mas relativo; diversas pesquisas demonstram que, em geral, os estudantes tendem a atuar com base em manipulações sobre a situação apresentada e não com uma concepção preestabelecida fora dela. Diversos autores têm ainda mantido que os sujeitos humanos, desde o nascimento, reconhecem informações mediante códigos relativos e não mediante códigos absolutos, ou seja, sabem dizer "este tem mais do que este outro" ainda que não quão grande é. O trabalho de Alina Spinillo (da UFPe) mostrou, por exemplo, que crianças bastante jovens são capazes, em muitos casos, de comparar duas fotos de copos com água, e dizer se são ou não fotos de um mesmo copo, usando como referência a metade.

Raciocínio estruturado aditivo

Chama-se assim ao conjunto de estratégias e desenvolvimentos que um sujeito faz observando as propriedades de tipo aditivo do fenômeno que trata. Não é exclusivo de situações de adição. Relaciona-se sobretudo com explicações sobre as relações em que se percebe um todo referente às partes que o compõem. Pode existir raciocínio aditivo em situações de multiplicação, de partição e em situações funcionais.

Do ponto de vista da estrutura dos problemas de adição e subtração, identificam-se segundo o verbal: mudanças, combinações, comparações e equivalências. Do ponto de vista dos processos, as estratégias utilizadas são: contagem total, contagem com modelos e uso de seqüências para as adições; separações, contar para trás, juntar, situar e escolher. E do ponto de vista da estrutura, distinguem-se: separação, união, comparação e combinação. Em cada uma delas pode ser desconhecida a parte, o todo, o referente e o fator de mudança ou comparação.

Digamos, por último, que o desenvolvimento de ditas estratégias de pensamento implicam um nível de abstração progressivo que pode ser antecipado, como se demonstra em algumas experiências na proposta de atividades organizadas de modo especial, em contextos especiais, nos quais se tem visto que isso é possível. Há exemplos de D. Lerner e P. Boero entre outros, com situações nas quais Piaget não teria imaginado que os estudantes fossem capazes de produzir esse conhecimento.

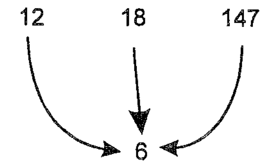
Pensamento proporcional

Chamamos pensamento proporcional aquele que corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva. Alguns autores consideram que existem tipos de problemas que, implicitamente, levam consigo esse tipo de pensamento, e são: comparações, razões, conversões (também chamadas trocas de unidade), inclusão hierárquica e combinações. Em cada caso pode-se ter como incógnita qualquer um dos elementos ou um total. O pensamento proporcional associa-se normalmente às operações de multiplicação e divisão.

As situações de proporcionalidade como esquema instrumental utilizam quatro tipos de técnicas fundamentais: redução à unidade, modelagem proporcional, modelagem fracionária e modelagem algébrica. Podemos ver os três primeiros no seguinte problema: "Se 6 balas custam 15 moedas, quanto custam 10 balas?" A redução à unidade justifica que uma bala custa 2,5 moedas, e 10 custam 25. Num raciocínio proporcional, usa-se a teoria de proporções para identificar que 6 está para 10 assim como 15 está para o desconhecido. Assim, sabe-se que isso é equivalente a 3 está para 5 como 15 está para o desconhecido, e 1 está para 5, assim como 5 está para o desconhecido. A partir disso, vê-se que o desconhecido é 25. Mediante frações reduz-se o problema anterior a uma equivalência na qual há um "termo desconhecido", que deve ser 25.

❑ *Raciocínio e investigação aritmética*

Independentemente da forma de raciocínio utilizada, é evidente que o pensamento se põe em movimento perante perguntas, com o que o trabalho escolar se torna efetivo e gera raciocínio quanto mais abertas elas forem. Vejamos o caso do seguinte problema:



Observando o desenho, vê-se uma relação entre números naturais indicada pelas setas. Faça um informe sobre como se comporta esta relação com outros números e o que você acredita saber dela em geral.

É fácil verificar que a relação não indica que um número "é múltiplo de" outro (147 não é múltiplo de 6) nem indica que os números têm 6 algarismos. Uma primeira descoberta a ser feita é de tipo interpretativo, reconhecer que as setas indicam aquilo que "têm em comum" os números. Uma resposta simples é seu número de divisores. (Notemos que poderíamos introduzir no enunciado que estamos falando de "divisores" ou propor a situação, logo depois de termos falado deles na sala de aula). Uma vez descoberto ou conjecturado isso, estabelece-se um plano de ação para investigar as características de tal relação. Esse tipo de trabalho fomenta uma idéia da atividade matemática mais próxima do que ela é em si mesma: um exercício de busca constante, com conjecturas, refutações, reflexões, generalizações etc, em que o operatório (cálculos) desempenha somente um papel predominantemente instrumental.

Na direção de um raciocínio de alto nível

Como explicamos, podemos reconhecer tipos distintos de raciocínio ligados à aritmética, e diversos autores centram a discussão no fato de que alguns desses tipos são de nível superior a outros. Chamaremos raciocínio de alto nível (seguindo L. Resnick) aquele que estabelece relações, não é imediato, e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algorítmicos. Exemplos claros no mundo dos números são o estabelecimento de generalizações e a dedução de regras com base em observações de padrões numéricos. Em outras seções iremos nos concentrar em como podemos ir caminhando em direção a esse nível mediante perguntas adequadas. Independentemente das melhoras chamadas evolutivas, podem-se propor situações simples de alto nível a alunos jovens. Tal é o caso de propor que se dê justificações ou generalizações para fatos observados. Por exemplo, quantos retângulos diferentes se podem formar com 15 quadradinhos?

Reconhecer estratégias e raciocínios de alto nível tem sido objeto de diversas investigações. Uma situação que pode ser usada para analisar a emergência de estratégias de generalização é esta: pede-se aos estudantes que observem e completem a seqüência de cálculos 3 + 5 = 8 ; 4 + 6 = 10 ; ... + ... = ... ; ... + ... = ... Quando se pede que façam alguma descoberta a partir daí, muitos dizem que, à direita do igual, sempre dá números pares. Porém, poucos são capazes de dizer que, somando dois números que diferem em duas unidades, sempre dá resultado par. Uma explicação comum que é dada é de tipo iterativo "a primeira soma dá par e cada vez somamos dois mais" . Ainda menos estudantes sabem dar uma justificação não-iterativa, o que seria um sinal de pensamento de alto nível.

Processamento de informação e ação aritmética

Vamos discutir algo das teorias que realçam globalmente as relações entre o conteúdo do cálculo numérico e a resolução de problemas. Por que se produzem certos erros? Por que muitos alunos não sabem resolver problemas aritméticos? Fala-se em diferentes níveis de significação da situação apresentada aos sujeitos; assim, produzem-se bloqueios por : a) interpretações inadequadas (já que a pergunta verbal pode ter sentidos distintos ou a imagem desenhada pode não ser compreendida, entre outros motivos); b) estratégias transferidas de uma situação a outra na qual não se podem aplicar (usar uma soma num lugar que não se deveria entender assim); c) falta de tempo para reconhecer realmente a situação apresentada (o professor pressiona e logo passa para outra coisa); d) falta de análise sobre a adequação ou utilidade manifesta de um certo procedimento (porque há preconcepções errôneas e não há tempo para revisá-las); e) fracasso na consecução do objetivo proposto (comprova-se o resultado final e, ao ver que não conseguiu, o professor desanima e não propõe alternativas diferentes).

Alguns autores adotam uma perspectiva teórica segundo a qual se constrói conteúdo mediante representações. As representações mais simples são aquelas que indicam mera tradução para um esquema simples e que reproduz situações chamadas análogas. Nessas situações, atua-se da "mesma forma" e, assim, aplica-se um conteúdo que se supõe armazenado, geralmente por experiência cumulativa. Nessa perspectiva, os problemas aritméticos são vistos como proposições e devem ser resolvidos, antes de tudo, tratando-se de traduzir bem o enunciado, de maneira que se perceba essa "estrutura interna". Daí surgem modelos teóricos como os de Greeno, Anderson, Siegler ou Lesh; embora tenham matizes distintos, todos eles consideram o processamento do cálculo como um armazém de regras sintáticas. Ainda assim, das pesquisas subjacentes a esses modelos, aprende-se algo relevante: os enunciados são importantes, no sentido de que, modificando as perguntas, consegue-se que os estudantes às vezes percebam adequadamente o que é pedido.

Seguindo nessa direção, muitas pesquisas estão mostrando que existem elementos referenciais exteriores (núcleos "concretos") que participam da produção dos alunos, o que sugere fortemente que a aprendizagem pode ser fomentada na medida em que se ofereça a possibilidade de o aluno afirmar coisas e justificar suas afirmações. Parece-nos que o problema não é, então, encontrar boas "representações" (materiais manipulativos, desenhos, jogos etc.), mas promover experiências e reflexões.

Uma conseqüência é que não se deve propor situações nas quais procedimentalmente levemos aos conceitos matemáticos; essa foi a típica visão estruturalista dos anos 70 a 80. Parece, porém, que tampouco vale o caminho inverso. J. Hiebert dizia que o importante é enfatizar representações externas, que coloquem o sujeito em capacidade de construir representações internas adequadas. Mas, que é isso, adequadas? Como se atua sobre as chamadas representações internas? A idéia de se trabalhar em torno da produção de afirmações e justificações oferece uma visão alternativa a ambas abordagens, e sugere o caminho da investigação aritmética como adequado, e não apenas o da resolução de problemas.

Experiência matemática e produção de hipóteses

Não há dúvida de que só há experiência educacional séria se há trabalho produtivo dos estudantes, e isso sugere fortemente a necessidade de apresentar problemas, histórias ou questões que surjam de algo palpável, e que façam com que o estudante elabore hipóteses de solução para o proposto. Até há pouco parecia que em aritmética não se podia fugir dos preços como "o" palpável do cotidiano, e, fora disso, devia-se usar elementos manipulativos. A pesquisa recente, no entanto, fala de um ensino realista de diversos pontos de vista. Há abordagens que propõem a apresentação de situações "realistas" — parecidas o bastante com situações reais —, elaboradas de modo a permitir que se entreveja uma certa estrutura matemática, como é o caso dos projetos holandeses. Existe, no entanto, uma outra concepção, que procura não desligar a escola da realidade mesma. Assim, os núcleos que se propõem surgem da vida dos estudantes, como é o caso do trabalho de Gelsa Knijnik nos projetos do Movimento Sem-Terra. A primeira visão tem acentuado a reflexão sobre o uso de materiais, jogos e referentes manipulativos. A segunda chega a prescindir disso, na medida em que estes não se vinculam ao cotidiano. A cultura não-escolar inclui práticas sociais que comportam núcleos (compra-venda com dinheiro, observação da natureza usando medidas de objetos do meio próximo, quantidades que modelam relações humanas, geográficas etc.) em que se podem empregar elementos matemáticos, propriedades, estratégias. Geralmente se considera que essas experiências são frutíferas na vida escolar na medida em que promovem desenvolvimentos institucionais, aceitos e requeridos pela comunidade, como a propriedade distributiva da multiplicação sobre a soma, o uso de técnicas de cálculo com decimais ou até mesmo exponenciais. O certo é que possuímos experiências de pesquisa suficientes para afirmar que *é possível chegar a esses conteúdos com base em experiências cotidianas* bem organizadas pela atividade escolar. Mas não se trata só de "conteúdos": mediante núcleos constituídos com base em situações cotidianas, consegue-se, por exemplo, desenvolver processos cognitivos chamados de antecipação e raciocínio hipotético, como no trabalho de Paolo Boero, de Gênova.

O ensino-aprendizagem de "aritmética" deixa de ser o importante. O central é promover experiências potencialmente ricas, que talvez não sejam somente aritméticas. A dificuldade consiste em como gerenciar na classe a passagem da descoberta de certas regras e o uso de certas estratégias (o intuitivo) a um explícito o mais corretamente expresso e matematizado (o formal). Chegando aí, a tentação é evidente: o professor muda o núcleo usado, instituindo o formal como núcleo em si mesmo e diz aos estudantes "o que têm de saber". Produz-se uma ruptura que às vezes é assimilada por alguns, porém, não faz caminhar a todos.

❑ *Um resumo intermediário: Pensamento aritmético*

Entre as dificuldades e os erros, constatamos dois tipos básicos: os que surgem na produção de significado para números ou estruturas, e o papel do operativo na resolução de problemas. No que diz respeito aos tipos de raciocínio que intervêm no numérico, citamos os seguintes: figurativo-visual, absoluto/relativo, aditivo, algébrico (que será objeto de outra parte deste livro), multiplicativo, inferencial. Evidentemente existem outros. Os tipos de conteúdo sobre os quais se raciocina são: processos algorítmicos (adições, multiplicações etc), processos gerais (simples interpretações como relações entre o real e o simbólico, generalizações de observações dadas ou não etc.), elementos conceituais representados (por exemplo, representar um resultado em forma gráfica num sistema de referência dado) ou não (uso adequado de algoritmos em relação a realidades), ou elementos integrados processo-conceito (estimativa e avaliação de margens de erro da mesma), atitudes abertas, socializadoras, comunicativas perante as atividades, e valorização apropriada do trabalho aritmético como importante, embora reconhecendo limitações. E há diversos níveis: intuitivo (reconhece e produz imagens), tecno-simbólico (integra imagens e reconhece propriedades), formal (formaliza as propriedades observadas e reconhecidas na produção de novas imagens), estruturado (reconhece estruturas conceituais e procedimentais e é capaz de inventar situações e novas estruturas associadas a elas).

Para a atividade aritmética, tem-se de constituir núcleos com relação aos quais os alunos sejam capazes de produzir afirmações aritméticas com significado, isto é, para as quais sejam capazes de constituir justificações.

❑ *Na direção de um sentido numérico*

Em que direção vai o ensino-aprendizagem da aritmética? Em que direção deveria ir? Durante muitos anos, tem-se valorizado o sistema de numeração como fundamento para o reconhecimento numérico. Se a isso era acrescentado um trabalho sobre a estrutura algébrica das operações, supunha-se que já se apresentava totalmente em forma o conhecimento quantitativo. A pesquisa recente e os parâmetros curriculares de diversos países refletem sobre a necessidade de desenvolver intuições sobre o aspecto quantitativo das situações, entendendo os números em seus diversos significados e relações, possuindo referentes para as quantidades e as operações. De fato, com base nos projetos curriculares dos anos 90, iremos encontrar os cinco elementos seguintes: i) os números devem estar relacionados com contextos reais; ii) desenvolvimento de um sentido numérico e não somente da numeração em seu valor posicional; iii) consideração da aritmética desde suas diferentes linguagens, promovendo significados e justificações diversas associadas a núcleos de experiência distintos; iv) reconhecimento e uso do cálculo; e v) estímulo à análise da estrutura numérica.

O que é sentido numérico?

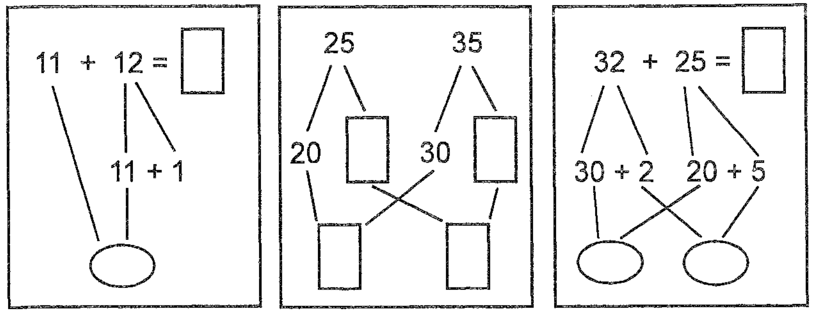
É indiscutível que os estudantes devem desenvolver intuições quantitativas, ou seja, devem dispor de técnicas e conceitos necessários para reconhecer o valor de quantidade, ordem, situação e operação, que se expressam mediante números e correspondem a inúmeras situações cotidianas ou, simplesmente, reais. Nos últimos anos, diversos resultados de pesquisa têm mostrado que os estudantes não valorizam, nem a estrutura escolar curricular desenvolve, um conhecimento intuitivo sobre os números. Diversos autores citaram, já faz tempo, a importância de reconhecer uma *arquitetura numérica*, entendendo como tal o conjunto de relações entre um número e os demais, considerando-o como quantidade.

Atualmente, está-se desenvolvendo a concepção de *sentido numérico* como o conjunto de características e de rede de relações que permitem relacionar números com operações, com o objetivo de resolver problemas flexivelmente e mediante formas criativas, uma noção proposta por Judith Sowder, pesquisadora norte-americana. A entrada num "sentido numérico" implica diversas ações cognitivas, sistematizadas no seguinte: a) embora se reconheça uma *operatividade* de técnicas, não se trata de executar um pensamento algorítmico; b) não existe sentido numérico sem um *processo de auto-regulação* do pensamento, *incerteza* nos dados e resultados que se tem; c) dá-se numa *multiplicidade* de caminhos e diversidade de soluções, de forma que a produção de juízos correspondentes não pode afirmar que tal ou qual raciocínio seja melhor do que outro; d) inclui *complexidade*, necessita atribuir *significados* e requer um *esforço*.

Entre as características ou habilidades analisadas pela pesquisa, e que se consideram como fundamentais para um bom sentido numérico, citamos as seguintes: identificar significados para os números e as operações, reconhecer o valor relativo dos números, descobrir relações e padrões, imaginar e descrever uma quantidade em função de outras, de formas diversas, e intuir e estabelecer raciocínios na resolução de problemas. Também há fatores de atitude e valor como o saber situar-se no "mundo dos números", e reconhecer o valor e os limites do uso do cálculo mental, escrito e com calculadora.

Textos numéricos e seus significados

Durante a década de 1980, realizou-se muita pesquisa sobre a importância de representar graficamente situações aritméticas. Isso pode favorecer, por exemplo, a aquisição de estratégias de cálculo. De fato, na ilustração seguinte mostra-se como desenvolver, com esquemas, estratégias de cálculo mental para: soma de números consecutivos, adições que completam dezenas ou decomposições.



O interessante desses esquemas ou formas textuais é que não devemos esperar que os próprios alunos os desenvolvam, e, sim, que os introduzam o professor e o livro-texto, o que faz com que devam ser considerados como um elemento de provocação: "O que você está vendo?", "O que acha que vai acontecer se, no lugar desses números, colocarmos outros?" Assim, produz-se um significado para aquele texto (não-verbal), e se cria espaço para a explicitação de justificações.

Pode-se também usar tabelas para indicar de forma quase simbólica relações desconhecidas, ou para reconhecer propriedades:

- 4

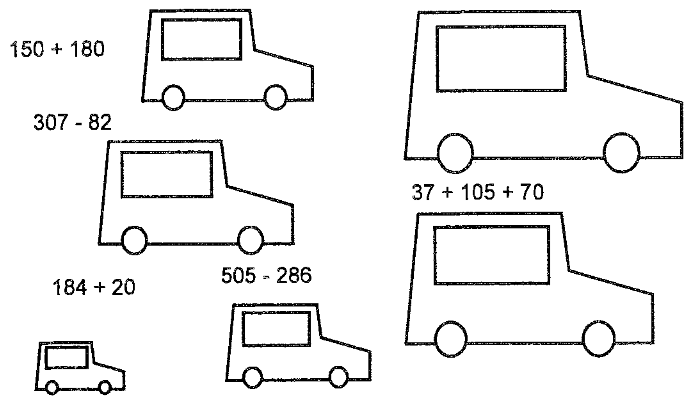
4	
8	
	12
6	

- 8

	4
	6
	8

Comparados com os dois exemplos que apresentamos, há textos figurativos que fazem perder de vista o conteúdo matemático e indicam somente uma forma inútil de "escrever" o resultado. Tal é o caso da seguinte situação, na qual se devem colocar resultados nas janelas dos caminhões.

Ordene os resultados, associando-os ao caminhão correspondente:



Considerando que os signos (caminhões) não correspondem ao que se estabelece (não são proporcionais ao resultado), os textos que se produzem não acrescentam nada. O problema é resolvido, mas sem intervenção do texto figurativo.

Superando percepções errôneas nos conceitos

Formar um sentido numérico, que se baseia num sentido comum, passa por reconhecer elementos visuais mediante experiências perceptivas de todo tipo. Para isso, utiliza-se todo tipo de expressões, desenhos e experiências, como as que indicamos até aqui.

No caso particular das frações, é preciso considerar o seguinte: a) enfatizar, ou dar somente uma forma gráfica de fração (a usual imagem de superfície associada ao retângulo ou círculo), é, às vezes, um obstáculo para a compreensão das outras — deve-se também introduzir formas discretas, que levem à idéia de operador; b) é importante a reta numérica, porém, não se deve confundi-la com a régua. Ainda assim, deve-se usar a régua, insistindo que, embora mude a graduação de um aparelho para outro, e as precisões não sejam as mesmas, a ordem é conservada; c) é preciso valorizar as diferentes formas de ordenação — claramente comparativas ou não-comparativas — ficar somente em

"ordenar = procedimento simbólico" é um obstáculo para outras interpretações da fração que não correspondem à quantidade; d) é necessário insistir em formas verbais da fração no uso cotidiano e em seus diversos inconvenientes; f) reconhecer núcleos e textos constituídos com base em situações de tipo físico, no trabalho com problemas de fotografias, observações com a lupa etc.

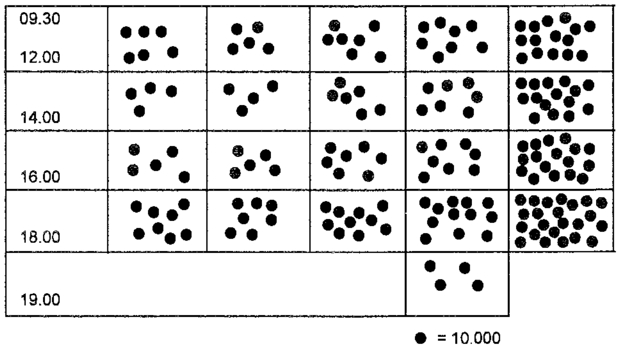
Produção de textos num mundo discreto

O interesse atual pela matemática discreta no âmbito curricular é indubitável. De fato, seu desenvolvimento é necessário, na medida em que dá sentido à resolução de problemas aplicáveis à vida cotidiana que não podem ser resolvidos mediante rotinas simples de cálculo, e enfatiza métodos importantes da matemática, como a indução e o tratamento recursivo (conforme recomendações curriculares do National Council of Teachers of Mathematics, dos Estados Unidos, de 1991). Além disso, o discreto é importante tecnologicamente, já que todos os equipamentos digitais trabalham nesse domínio, inclusive os computadores.

O discreto permite não só o regresso ao passado das técnicas de contagem como também o surgimento de novas idéias e proposições; aparece em estruturas lógicas, combinatórias, no uso de padrões iterativos ou recursivos, na algoritmização, na análise de redes, em elementos probabilísticos, em códigos, em métodos de otimização. As representações correspondentes são esquemas, reticulados, códigos, grafos, diagramas e seqüências. Valorizar esse tipo de modelos implica o ressurgimento de velhos problemas combinatórios como colorir figuras, trabalhar com a existência de quadrados latinos mágicos ou de propriedades aritméticas que permitem decrifrar códigos secretos.

Exemplos discretos simples são as "aritméticas do relógio" (aritmética modular), os trabalhos de codificação e a identificação de seqüências elementares (como conservação de paridades).

É indubitável o valor crescente que adquire o comunicativo no mundo atual. É habitual, cada vez mais, tentar dar às pessoas dados de forma aproximada, visual, atrativa, que causem impacto. Porém não somente por isso. Já indicamos que raciocinamos melhor se temos imagens visuais. Por isso, as configurações pontuais dos números (ou seja, desenhar cinco pontos para indicar 5, um retângulo de 2 x 3 pontos para indicar 6 etc.) adquirem valor. Na tabela que se mostra a seguir, indicam-se os consumidores de álcool (cada ponto representa 10.000 pessoas) durante os cinco primeiros dias de uma semana habitual num país do norte da Europa. Como se vê, os dados, apresentados na propaganda de uma revista, expressam-se de forma que atinge o leitor de maneira forte:

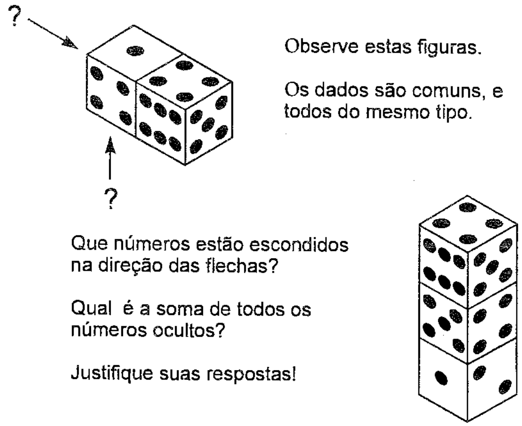


A visualização que permite a aproximação dos dados reais é evidente. O leitor poderá tirar suas próprias conclusões sobre o consumo de álcool em "horas de trabalho" e o aumento de consumo conforme a semana passa.

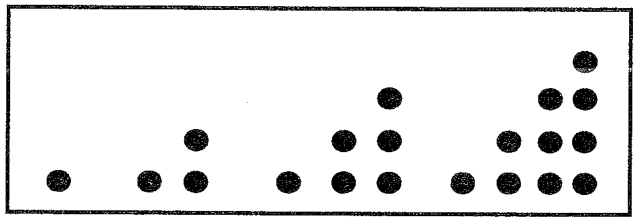
Investigando o visual na sala de aula

Em classe, é possível propor diversas situações cotidianas que implicam visualização. Um caso elementar é observar dados

e reconhecer que a soma das faces opostas de dados é 7. Posteriormente, identificar adições entre faces visíveis ou não etc., como se mostra na figura.



Em relação a esse tipo de situação, há outras, mais complexas, que tratam de identificar seqüências numéricas pela visualização. Tal é o caso dos números poligonais. O caso mais conhecido é o dos números triangulares (1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, ...) associados ao jovem Gauss, de quem se diz que, com 11 anos, soube calcular o triângulo de 100 linhas; abaixo, apresentamos as configurações visuais para os primeiros números triangulares.



Os estudantes adotam diversas soluções com base na visualização correspondente. Assim, estabelece-se um primeiro grau de generalização, que é encontrar a regra de formação e contagem dos números triangulares.

A pesquisa sobre configurações visuais pontuais tem mostrado muitos aspectos cognitivos de interesse sobre o conhecimento dos estudantes, como no trabalho de E. Castro, de Granada (Espanha), aspectos que relacionam esse tema com o geométrico: a) os estudantes usam prioritariamente elementos simples, figurativos ou não, e desorganizados, ao invés de representações geométricas organizadas; b) refletem um predomínio do aditivo em seus raciocínios estruturados sobre o reconhecimento de padrões numéricos em situações visuais; c) é difícil para eles reconhecerem inicialmente os processos indutivos, e vêem mais facilmente os elementos iterativos. Viu-se também, entretanto, que as informações visuais gráficas favorecem o desenvolvimento de abordagens indutivas.

No entanto, não existe um acordo sobre qual é o significado que se deve atribuir à visualização numérica. Para alguns autores, a imagem visual relaciona-se com uma imagem mental existente sem a presença direta do objeto (por exemplo, para J. Piaget e B. Inhelder), ao passo que, para outros, pelo contrário, na visualização deve-se incluir a habilidade para interpretar a informação figurativa (por exemplo, para N. Presmeg), sua manipulação mental e sua representação sobre um suporte material. Nesse caso, o pensamento visual pode ser definido como o processo de "formar imagens e usar tais imagens para descobrir e entender as matemáticas".

❑ *Relações numéricas*

No tratamento aritmético, dão-se diversos tipos de relações. Vamos considerar somente algumas: a) partes/todo; b) o uno e o múltiplo; c) ordem, situação e separação; d) estimação; e) aproximação; f) estruturas.

Parte-parte-todo

Uma das características importantes das relações numéricas é a das partes com um todo. Uma primeira análise estrutural realizada por Carpenter e Moser, ampliada posteriormente por sucessivas análises, estabelece que esse é o esquema de raciocínio de muitos problemas de adição e subtração em diversos contextos, sejam discretos ou não. De fato, responde a contextos cardinais como "A tem... B tem... quantos eles têm no total" ou "quantos faltam a A para ter... ", "A e B têm... A tem... quantos tem B". As situações podem ser de medida: "o Estado A tem... metros quadrados e B... e concordam em se fundir... que superfície ocupará o novo Estado". Ou também situações monetárias como: "comprei... que vale... e depois... que vale... quanto custou tudo" ou "gastei no total... e em ... gastei... , quanto gastei no resto" ou "quero comprar... que custa... e disponho de... quanto preciso".

O problema das relações entre as partes e o todo leva a considerações não estritamente aritméticas, mas também algébricas, como veremos no próximo capítulo.

O uno e o múltiplo

Na pesquisa sobre os processos de contagem, são descritos alguns significados que as crianças produzem para a noção de unidade. Parte-se da idéia de que a construção de unidades é um pré-requisito para contar. Assim, afirma-se que a raiz de toda quantificação e de todo pensamento numérico e operativo se relaciona com a construção mediante repetição de unidades discretas e sua união. Ou seja, analisaram-se os protocolos dos estudantes e foi possível identificar as unidades que esses estudantes utilizavam. Isso se repete no domínio dos racionais; de fato, na construção e na análise semântica das frações, aparece claramente a idéia de unidade. Sugere-se também, mais amplamente, que há uma complexidade sucessiva da idéia de unidade, que corresponde a um pensamento recorrente e recursivo.

A noção de unidade tem dois significados distintos, relacionados com dois termos verbais: unidade e unicidade. Nas situações de contagem, parecem intercambiáveis. Porém, o que está claro é que construir o caráter de unicidade de um pacote de 9 garrafas é qualitativamente distinto a 1. Esse é o caso das dezenas e das centenas. Por outro lado, o que está claro é que o processo de "unitizar" ou "fazer um" é fundamental na aquisição do sentido e da estrutura numéricos (raciocínio multiplicativo e conhecimento das frações) e representa um processo de decomposição. Uma conseqüência simples dessas reflexões é que passar de 4 (unidade-1) a 1 (unidade-4) não é nada fácil. Esse processo é denominado *conversão unitária* e relaciona-se com a coordenação de unidades.

Ordem, situação e separação

Uma das características que facilitam o conhecimento numérico é a capacidade de ordenação reconhecendo escalas diferentes. A visão ordinal dos números é tão importante no seu valor de simples codificador como no seu valor relativo (ficar em 325º lugar numa maratona de 100 mil participantes é um bom resultado). Entre as estratégias de tipo absoluto e relativo, consideramos: a ordinalidade, o uso de escalas diferentes, representações diferentes dos números, sentido relativo em contextos reais e uso de elementos referentes. Além das estratégias de comparação ou relatividade associadas a situações concretas que possam se conhecer, isso pode ser deduzido de três tipos básicos de considerações: aritméticas, geométricas e topológicas.

Ordenar como imagem absoluta reflete, numa representação de reta numérica, um primeiro problema de *situar*. Isso implica que as relações "maior que" e "menor que" se associam a "estar à direita de" ou "à esquerda de". Isso pode ser colocado de forma contrária: se nos desenham algo como na figura e nos perguntam o que podemos dizer do número n, podemos concluir que n é maior do que o ponto médio que é 45, e parece que está no meio entre 45 e 80, ou seja, perto de 65.

Dizer que um número é maior do que outro ou que o resultado de uma operação é maior do que o de outra, pode se dever a motivações muito distintas. Por exemplo, sei com certeza que 10 x 3 é menor que 11 x 3 se tenho claro o significado de multiplicação, mas posso argumentar por meio do conhecimento que tenho do resultado; porém, graças ao simples significado, posso deduzir que 51 x 32 x 77 é menor que 60 x 40 x 80 sem necessidade de saber seu valor exato; nesses casos, os argumentos são *aritméticos* e se relacionam com o aspecto quantificador ou de medida.

Em outros casos, dão-se relações de tipo *geométrico*. O ponto médio entre 1/3 e 2/3 é 1/2, já que, se a distância de cada um a 0 e a 1, respectivamente, é a mesma, o ponto central é 1/2. Mas, se for dito que a distância é a mesma, ou seja, 1/2 - 1/3 = 1/6 que 2/3 - 1/2 = 1/6, está-se fazendo um raciocínio aritmético e ao mesmo tempo geométrico.

Junto com a ordem dão-se, também, diversos tipos de relações de tipo *topológico* como: separação, vizinhança e pertinência a uma vizinhança. Por exemplo, como 3/7 é menor que 1/2, porque a metade de 7 é 3,5, e sei que 2/3 é maior que 1/2, então, *3/7 é menor que 2/3*. Aí, há um raciocínio em que 1/2 atua como separação. Nesse caso, o aritmético existe, porém, não predomina no raciocínio com o geométrico: A está à esquerda de B, e C está à direita de B, então, C está à direita de A. As relações de vizinhança levam a relações de posição, e estas são de grande utilidade nos trabalhos de estimação.

O exemplo mais utilizado de *separação* é o que exercem os naturais entre as frações. Não sei quanto é 76:87, mas se devo representá-lo na reta, estará à esquerda de 1. O aritmético me diz também que está "perto" de 1.

O sentido numérico, já citado, utilizar-se-á de contextos particulares nos quais decidiremos a estratégia que nos pareça mais adequada entre as que temos a nossa disposição. Por isso, como já comentamos, a importância de atribuir significado aos pontos de referência em contextos determinados (preço de objetos, objetos que possuam medidas predeterminadas, situações que são executadas num tempo estabelecido etc.). Num outro caso, serão os raciocínios que evidenciarão o sentido numérico em jogo, e que levarão a estratégias mais ou menos eficientes: "O que sei de 3/4 que seja aplicável na resolução do meu problema? Usarei que 3/4 é igual a 1/2 + 1/4, ou que é a mesma coisa que 6/8, ou que sei que 3/4 de 8 são 6, ou que 3/4 é maior que 2/3, ou que está entre 1/2 e 1...?"

Estimativa e suas dificuldades

"Quantos?": essa é a pergunta típica do numerável, referindo-se à quantidade de elementos de um conjunto de objetos. Em muitos casos, não são percebidas diretamente as quantidades e torna-se necessária a determinação de *estratégias para reconhecer uma quantidade de objetos*. Entre elas: escolher uma amostra qualquer (ao acaso) e usar um raciocínio proporcional, estatístico, fazer seções, usar métodos paramétricos (por exemplo, comprimentos e larguras para encontrar superfícies e volumes). Estimam-se também *medidas*, como comparações em relação a uma unidade de referência. Isso implica uma imagem da dita unidade, e uma idéia de seu tamanho. Um bom estimador é aquele que possui um bom número de referências para resolver essas situações. Por último, estima-se o *resultado de operações*.

As três visões anteriormente citadas são três tipos de estimativa próprios do ensino obrigatório. Pode-se, porém, estimar valores numéricos de uma função, curvas aproximadas a um fenômeno, probabilidades de um evento, quantidade de termos necessários para um resultado estatístico confiável, e assim por diante.

Estimativa e aproximação não são sinônimos. A estimativa tem sido definida como a forma de produzir um juízo sobre o tamanho, a quantidade ou o número suficientemente exato para algum propósito dado, o que coincide com o significado vulgar da palavra estimar como juízo de valor sobre algo, e trata-se de uma habilidade com destrezas associadas. A aproximação, por sua vez, é uma técnica concreta. A maior parte das pesquisas sobre estimativa foi realizada nos anos 80, e entre os objetivos encontra-se definir os componentes que intervêm num *cálculo estimativo*. Segundo Judith Sowder e David Wheeler, esses componentes são os seguintes:

a) Conceituais
b) Habilidades e destrezas
c) Relações
d) Componentes afetivos

A esses, devemos acrescentar os seguintes, úteis especialmente no caso das frações:

e) Elementos conceituais referenciais métricos específicos
f) Estimativa e planificação. Predição e reconhecimento visual

Não se sabe com clareza quais são as condições melhores ou básicas para uma boa estimativa. Há pesquisas que mostram que reconhecer fatos numéricos e possuir um bom conhecimento do sistema posicional não é suficiente para ser um bom estimador.

Sobre a aproximação

Quando temos de operar com 1/2, sabemos que podemos escrever 0,5. É exato. Quando falamos do número π dizemos 22/7 ou 3,14. Essas são aproximações. Aproximar é a ação de substituir um número (ou elemento de um espaço métrico) por outro suficientemente próximo, por algum motivo. O segundo diz-se uma aproximação do primeiro. Na prática, aproximam-se com freqüência as frações por outras mais simples, ou por porcentagens, ou por decimais, ou naturais próximos; aproximam-se números reais por decimais ou frações. Trata-se, portanto, de um processo de simplificação, com o objetivo de: fazer um *cálculo estimativo rápido* ou mental, *reconhecer* algo porque se acerca a um referente mais fácil de *comparar*, ou simplesmente por exercer uma *comunicação* mais efetiva com outros.

Para falar de 4/17 pensamos que é um pouco menos do que 1/4, e, portanto, estima-se em menos de 0,25. Uma aproximação até os centésimos é 0,23 e outra mais precisa daria 0,235291. Um arredondamento daria 0,2353. Consideramos como aproximação aquela técnica que permite a solução de um problema de contagem ou de medida, ou — como temos dito —, que busca um resultado que seja suficientemente preciso para um determinado objetivo. Isso implica a análise do erro cometido, a escrita e o cálculo aproximados em si mesmos, e a probabilidade de acontecer um erro.

A aproximação requer um conhecimento estrito do sistema de numeração empregado e do objetivo a conseguir. A aproximação considera habilidades e técnicas pouco analisadas na pesquisa, precisa usualmente de instrumentos (papel e lápis, calculadora). Assim, a aproximação converte-se numa forma de representação de dados e informações.

Entre as técnicas mais conhecidas encontram-se os arredondamentos, e, no caso das medidas, o uso de instrumentos de maior ou menor precisão facilita ou não a disposição de uma aproximação adequada. A necessidade de trabalhar o arredondamento está baseada em vários fatos importantes:

- Valorização crescente da simplificação verbal em manchetes dos meios de comunicação (comunicação visual/verbal);

- Importância das comparações entre grandezas. Daí a necessidade de compreender a ordem de magnitude (número de algarismos) de um resultado mais do que seu valor exato;
- Uso da proporcionalidade (interpretação de amostragens);
- Dificuldades em efetuar mentalmente produtos de números de mais de dois algarismos (limites da memorização);
- Introdução de calculadoras e notações científicas na vida comercial (representação social).

Arquitetura e operações

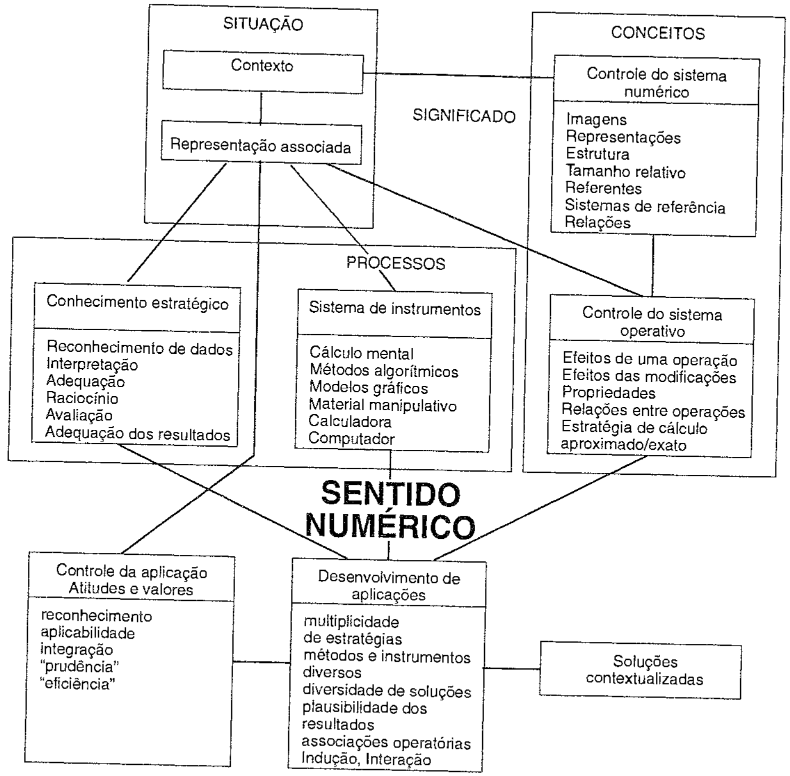
Um pedagogo catalão chamado Alexandre Galí falava, em 1924, que os meninos e as meninas devem reconhecer a arquitetura dos números e não somente sua engenharia. Isso implica, antes de tudo, o desenvolvimento de um *controle operativo*, que parece necessário a respeito do domínio do cálculo mental com números de 1 a 100, ou frações e decimais nos quais essas quantidades se apresentem. Essa é a parte prática, pragmática, a engenharia. Porém, a ela se deve atribuir um outro significado, diferente do habitual: uma arte, uma discussão sobre sua organização, seu desenho. Um sentido estrutural operativo dos números é muito mais do que saber calcular muitos resultados, ou pretender saber o porquê deles. A arquitetura implica o desenvolvimento da *aplicação de projetos ou de estruturas conceituais e procedimentais complexas* que somente podem surgir do trabalho de reflexão e teorização com base em produções dos próprios estudantes.

❑ *Algumas implicações curriculares*

Fomentar um sentido numérico requer que seja executado um plano de ação escolar baseado num constante processo matematizador produtivo. Com isso, contribui-se para um conjunto de aspectos da formação dos estudantes. Entre eles, citaremos os seguintes: a) de tipo estritamente matemático; b) de ordem atitudinal pessoal; c) de tipo social (de fato, fomentar um sentido numérico ajuda a desenvolver uma visão crítica perante temas como consumo, meio ambiente, saúde).

Num desenvolvimento curricular, integrador da pesquisa atual que contempla o sentido numérico, devem-se considerar procedimentos e conceitos no desenho do currículo. Existem situações conceituais que de fato levam ao desenvolvimento de procedimentos. Muitos desses "proceptos" novos (para utilizar um termo forjado por David Tall) são comuns a diversos conjuntos numéricos, mas outros não. A utilização de elementos operativos está ligada aos significados que são produzidos para as operações, e, no caso dos naturais, dos inteiros e dos racionais, há muito em comum, embora seja certo que os significados sejam distintos em certos casos, como na multiplicação. Com os números naturais, multiplicar indica fazer combinações, e não há sentido em "combinações fracionárias". Já elevar ao quadrado pode ter significado comum para os naturais, as frações e os reais, como no caso de encontrar a área de um quadrado de lado dado.

No esquema seguinte vêem-se as relações que constituem um sentido numérico numa dinâmica escolar. Com efeito, dão-se três elementos fundamentais: situação, conteúdos e aplicações. Os conteúdos são de conceitos, processos, atitudes/valores e proceptos. Há conceitos de dois tipos: de controle do sistema numérico e do sistema operativo. Há processos de dois tipos: estratégicos e "usos" provenientes de um sistema de instrumentos diferenciado. Os proceptos são os conteúdos de ação nos quais os estudantes relacionam e aplicam o procedimental com substrato conceitual determinado. Esse esquema de relações constitui a base para um "sentido numérico".



Entendemos o sentido numérico sempre em relação a um problema ou situação apresentada, daí o valor de reconhecer componentes de tipo estratégico; a volta à situação que provocou o problema fecha o ciclo. Esse esquema de inter-relação de componentes introduz uma reflexão maior sobre a aplicabilidade do sentido numérico.

Como estratégias de aprendizagem do sentido numérico, citaremos como importantes as seguintes:

- Uso de números em contextos
- Importância da visualização numérica
- Uso de técnicas de agrupações e decomposições
- Compreensão do significado de operações

- Diversidade de representações
- Tratamento da ordem
- Comunicação coletiva de estratégias
- Controle e reflexão sobre eficiência e aplicabilidade

❑ *Alcançando a "nova aritmética"*

Após termos dito em que direção devemos caminhar no desenvolvimento aritmético, perguntamo-nos como podemos consegui-lo. Desde o começo, sugerimos um conjunto de reflexões e medidas, com exemplos. Como integrar os princípios e as reflexões de seções anteriores para dar um conjunto de sugestões curriculares e de desenvolvimento efetivo em nossas salas de aula para os próximos anos? O grande elemento de contraste, para discutirmos como trabalhar na sala de aula (além do que dissemos a respeito do sentido numérico), é, sem dúvida, a análise do novo papel que devem desempenhar "os cálculos" e apresentar um elenco de diversas formas metodológicas que permitam a aquisição de um sentido numérico o mais amplo possível.

O papel do cálculo

O papel do cálculo nesse sentido numérico tem cinco aspectos: a) o reconhecimento da existência de *distintos tipos de cálculo* e das importâncias relativas de cada um, atribuindo em cada momento o papel operativo procedimental ou conceitual correspondente (informação); b) a explicitação das *relações numéricas*, de modo a resolver situações problemáticas concretas (intervenção e significatividade na resolução de problemas); c) instrumentalização de forma estruturada dos diversos cálculos, *integrando diversas relações gerais aritméticas* estudadas (estruturação); d) promoção da criatividade e surgimento de *estratégias próprias* associadas a processos de generalização, análise, síntese etc., identificando algumas *estratégias ou modelos de importância específica* (gestão); e, e) reconhecimento da *adequação, da utilidade e do valor das estratégias propostas* por nós mesmos e pelos demais (controle de qualidade).

O operativo e a resolução de situações

Existem diversos tipos de situações que se associam às operações. Isso requer que o professor esteja consciente disso e as proponha. Mas também deve-se propor o contrário: com base em uma certa operação, fazer com que os estudantes associem, em forma de pequeno projeto pessoal, enunciados correspondentes. No quadro seguinte damos exemplos ligados à multiplicação e à divisão.

TIPO	PROBABILIDADE DE MULTIPLICAÇÃO	DIVISÃO (MULTIPLICADOR)	DIVISÃO (MULTIPLICANDO)
Grupos iguais	3 crianças têm cada uma 3 laranjas. Quantas laranjas têm entre todas?	12 laranjas são repartidas eqüitativamente entre 3 crianças. Quanto corresponde a cada uma?	Se você tem 12 laranjas, para quantas pessoas poderia dar 4 laranjas?
Medidas iguais	3 crianças têm cada uma 4,2 litros de suco. Quanto suco há entre todas?	12,6 litros de suco são compartilhados em partes iguais entre 3 pessoas, quanto corresponde a cada uma?	Se você tem 12,6 litros de suco, para quantas crianças poderia dar 4,2 litros?
Gradiente	Um barco se move a uma velocidade constante de 4,2 m/s. A que distância pode chegar em 3,3 s?	Um barco percorre 13,9 m em 3,3 s. Qual é sua velocidade medida em metros por segundo?	Que tempo demora um barco para percorrer 13,9 m, a uma velocidade constante de 4,2 m/s?
Conversão de medida	A polegada é uma medida equivalente a 2,54 cm. A quantos centímetros equivalem 3,1 polegadas?	3,1 polegadas correspondem a 7,84 centímetros aproximadamente. A quantos centímetros aproximadamente equivale uma polegada?	A polegada é uma medida equivalente a 2,54 cm. A quantas polegadas equivalem 7,84 cm?

Comparação multiplicativa	O ferro é 0,88 vezes mais pesado do que o aço. Se uma peça de aço pesa 4,2 kg, quanto pesaria o mesmo volume de ferro?	O ferro é 0,88 vezes mais pesado do que o aço. Se uma peça de ferro pesa 3,7 kg quanto pesaria o mesmo volume de aço?	Se duas peças de igual volume de ferro e aço pesam, respectivamente, 3,7 kg e 4,2 kg, qual é o peso relativo do ferro respeito ao aço?
Parte/todo	Uma escola aprovou 3/5 de seus estudantes num exame. Se 80 fizeram o exame, quantos foram aprovados?	Uma escola aprovou 3/5 de seus estudantes num exame. Se foram aprovados 48, quantos fizeram o exame?	Uma escola aprovou 48 estudantes de 80 que fizeram um exame. Que fração dos estudantes foi aprovada?
Transformação multiplicativa	Uma peça de 4,2 m de comprimento foi alongada 3,3 vezes em seu comprimento original. Qual é o novo comprimento?	Uma peça foi alongada 3,3 vezes em seu comprimento original. Uma vez alongada media 13,9 m. Qual era o comprimento original?	Uma peça de 4,2 m de comprimento foi alongada até medir 13,9 m. Qual foi o fator de alongamento?
Produto cartesiano	Se há três caminhos de A a B, e 4 de B a C, quantas formas diferentes há de A a C passando por B?	Se há 12 caminhos diferentes de A a C via B, e 3 de A a B, quantos há de B a C?	Se há 12 caminhos diferentes de A a C via B, e 3 de A a B, quantos há de B a C?
Área retângulo	Qual é a área do retângulo de 3,3 m de comprimento por 4,2 m de largura?	Se a área de um retângulo é 13,9 m^2 e o comprimento é 3,3 m, qual é a largura?	Se a área de um retângulo é 13,9 m^2 e o comprimento é 3,3 m, qual é a largura?
Produto medidas	Se um aquecedor com potência de 3,3 kW funciona durante 4,2 horas, qual é o consumo em kWh?	Quanto tempo precisa funcionar um aquecedor de potência 3,3 kW, para gastar 13,9 kWh de eletricidade?	Qual a potência de um aquecedor que consome 13,9 kWh em 4,2 horas?

Cálculo mental estrito, além da visualização

As razões pelas quais o cálculo mental hoje é prioritário são as seguintes: i) requer e fomenta uma habilidade muito útil num momento no qual o escrito é menos importante pela introdução das calculadoras; ii) é um dos elementos-chave que permitem o domínio estrutural numérico, que pode ajudar a contrastar concepções e procedimentos que permanecem ocultos em outros tipos de cálculo; iii) é promotor de estratégias cognitivas de grande interesse como as generalizações, a aplicabilidade de situações matemáticas, a flexibilidade; iv) favorece a análise, a exploração, a criatividade, a imaginação e a memória; v) pode gerar uma visão lúdica das matemáticas. Encontramos em programas oficiais: "Deve-se favorecer a utilização pelos estudantes de suas próprias estratégias na atividade matemática, não só para conseguir uma aprendizagem mais funcional e desenvolver seu nível de auto-estima e auto-eficácia, mas também como expressão da criatividade e de formas de pensamento originais" (Currículo espanhol, 1993).

Os professores não aceitam, em geral, o ensino e a importância do cálculo mental, não só porque não se pensa que ajuda o sentido numérico, mas porque muitos pensam que obstrui a aprendizagem de métodos gerais.

Não é fácil reconhecer que os compêndios de métodos de cálculo mental, que ocupam páginas memoráveis dos grandes tratados de aritmética do século XIX, podem ser de grande valor na formação do professor. As regras ou técnicas para serem usadas de forma estritamente mental (sem ajuda visual) têm uma leitura diferente agora; a chave é propor situações de cálculo mental que permitam a reflexão posterior sobre as estratégias utilizadas. Como sempre, em algum momento, elas podem ser sistematizadas.

Os diversos cálculos e seus instrumentos

A realização da maioria dos procedimentos supõe a utilização de instrumentos. Nesse sentido, não é possível separar a definição de um procedimento do instrumento usado para realizá-lo. Dito de outra forma: sabemos escrever utilizando caneta e papel. De fato, *a execução de um procedimento não é separável dos instrumentos necessários para realizá-lo.* Os instrumentos utilizados para realizar as tarefas socialmente relevantes dependem do nível de desenvolvimento tecnológico da sociedade na qual se vive. Lavar é um procedimento cuja realização varia muito; segundo o caminho escolhido para sua execução, pode-se lavar à mão no tanque de casa, numa lavanderia da cidade, pode-se lavar com máquina etc. Porém, em cada sociedade existe uma forma comum ou massiva de realização de um procedimento quando se trata de algo que é feito com freqüência e no qual se investe muito tempo, ou seja, em algo que tem claras repercussões econômicas diante da produtividade. Em muitas sociedades urbanas, a forma comum de lavar é fazê-lo com máquina. É evidente, então, que não podemos colocar a questão sobre como devem se realizar os procedimentos sem levar em consideração o contexto social no qual são realizados. *Existe uma tendência social a padronizar a realização de procedimentos de relevância social e econômica mediante a utilização da tecnologia que, sendo de uso corrente nessa sociedade ou grupo social, é mais eficiente.*

Por outra parte, o cálculo é fundamentalmente um procedimento (ou um conjunto de procedimentos), e, por essa razão, falamos de cálculo *mental*, cálculo *oral*, cálculo *com barrinhas*, cálculo *com ábaco*, cálculo *com regra de cálculo*, cálculo *com papel e lápis*, cálculo *com calculadora* etc. Não é por acaso que a própria palavra "cálculo" faça referência ao instrumento com que seus inventores realizavam as contas (pedras). A padronização do cálculo é, ademais, uma tendência social. Portanto, a postura coerente não é, em nossa opinião, a que pretende a utilização massiva e irrefletida dos métodos que utilizam a última máquina inventada, mas também não é a dos que pretendem supor que a Terra parou de girar e que é possível isolar essa questão (o ensino de cálculo na escola) da evolução do mundo social e econômico.

Assim, segundo o que se espera da resposta a um problema, é utilizado um ou outro tipo de cálculo, e um ou outro tipo

de instrumento. Se quero saber o que devo pagar ao comprar 40 reais numa loja com 25% de desconto, não preciso de lápis e papel. Sei que é a mesma coisa que tirar 1/4 de 40, que são 10 dos 40 que custava. Ou seja, pago 30 reais. Seria absurdo que um estudante usasse uma calculadora. Se, por outro lado, quero calcular a área exata de uma parede de 4m35cm por 8m75cm, devo pegar minha calculadora!

O cálculo mental aproximado parte de um domínio memorizado do cálculo mental clássico das quatro operações básicas, com os números desde 1 até 100, com noções de aproximação assumidas convenientemente. Isso implica aspectos como os seguintes: a) reconhecimento do domínio dos números por composição e decomposição de adições e subtrações, do domínio de dobros; b) consideração do número como uma situação e como uma transformação; c) reconhecimento de aproximações importantes (dezenas exatas, terminações em cinco etc.); d) trabalho de delimitação que supere a simples comparação "maior/menor que", mediante um maior uso de expressões como "está entre...e ...".

Em síntese, o cálculo mental aproximado tem três características fundamentais:

- Conhecimento dos números e relações
- Conhecimento de um conjunto amplo de estratégias de cálculo mental
- Idéia clara de ordenação e delimitação em cada conjunto de números

Para trabalhar o cálculo aproximativo

As situações de cálculo aproximativo devem permitir seu uso ou sua aplicação, sua construção, sua interpretação e a análise correspondente. Por isso, os passos lógicos para um bom processo de ensino deveriam ser: reconhecer a situação dos números, absoluta e relativa, a comparação entre números e a provocação de situações de aproximação com operações de diversos níveis de dificuldade. Entenderíamos melhor o sentido da mecanização da qual falamos se fosse chamada "sistematização de estratégias", e então, talvez, não duvidássemos da necessidade desse trabalho na sala de aula.

❑ *Um novo currículo operativo*

Ainda temos perguntas cruciais como as seguintes: Podemos reduzir o cálculo e a aritmética a uma compreensão conceitual do significado dos números e operações, como em outro momento se reduziu a algoritmos e técnicas? Deve existir uma desvinculação do cálculo com respeito à numeração como sistema conceitual? Até que ponto se deve fazer um trabalho para melhorar habilidades e técnicas para "reconhecer ordem de magnitude, aproximação, estimação etc.", e em que sentido se devem introduzir os esquemas conceituais associados? Qual o papel que devemos atribuir aos novos meios instrumentais como calculadoras e computadores?

Não iremos, aqui, responder de forma completa a todas essas questões, mas podemos começar sua discussão afirmando simplesmente que a aritmética escolar deve deixar de lado dualismos vazios que não apresentam profundidade (calculadora, sim ou não?, algoritmos das operações, sim ou não? e outros), e prosseguir indicando algumas considerações que devem fazer parte do novo currículo operativo:

a) *Deve-se superar preocupações tecnicistas.* Os baixos resultados em provas de cálculo mostram-se ainda como algo desanimador e que deixa os professores em má situação. Por exemplo, muitos pais desejam que seus filhos dominem a tabuada na 2ª série e se queixam se isso não acontece; existe uma exigência social externa. Parece-nos que se esquecem de que o objetivo maior é que, ao finalizar a formação básica, o aluno tenha um domínio do cálculo aproximado, de modo que possa estimar quocientes aproximados, resultados de operações em geral, e saiba quando aplicar uma operação a uma situação dada.

b) *Eliminar a independência de campos numéricos (naturais, frações, inteiros...)*, que ocupam habitualmente lições separadas, e também promover trabalhos inter-relacionados entre o aritmético e outros aspectos da matemática. A maioria de nós ainda não está convencida da importância de trabalhar, desde cedo, com os processos de generalização na direção da álgebra, nem insiste suficientemente no cálculo com medidas e enunciados. Além disso, deve-se considerar as inter-relações entre representações diversas de um mesmo problema, e que surgem ao olhar o problema sob diversos enfoques. A aritmética não deve esquecer a reta numérica como forma de representação não só de números, mas também de "visualização" de operações e relações; dar significado a processos como passagem ao contínuo, com situações probabilísticas simples, mediante roletas e outras experiências, pode ser também um bom exemplo.

c) Deve-se dedicar *menos tempo ao esforço repetitivo de processos já abordados*, pensando que o anterior não está "suficientemente dominado". Observemos o exemplo seguinte. Muitos professores consideram que introduzir a multiplicação numa equação é uma complicação a mais: "Não se pode perguntar aos alunos que número multiplicado por 3 dá 24 quando se está multiplicando, isso é dividir! Não se deve fazer isso até que eles dominem a multiplicação!" Numa situação dessas, deve-se utilizar calculadoras e usar tabelas e recursos de forma que sejam integrados métodos adequados. Assim, provocam-se os problemas de multiplicação e divisão ao mesmo tempo, já que estão realmente relacionados.

d) Um *maior uso de um trabalho interdisciplinar*, que não se deve reduzir a motivações e uso de procedimentos comuns. O cálculo e a aritmética não devem esquecer as relações com a música, as relações das proporções com a arte, as vinculações das representações e das tabelas numéricas com a descoberta de propriedades que surgem da geografia, os fenômenos físicos e as expressões vinculadas à análise de processos do meio ambiente, do consumo etc.

e) *Introduzir situações nas quais se observe o valor do uso da calculadora*. Vejamos um exemplo simples:

> Use a calculadora. Você só pode utilizar as teclas 0, 1 e 3.
> Indique o valor mais aproximado possível que se possa obter das seguintes operações :
> 321 + 967 ~_______; 2987 x 29 ~ _______; 1322 : 12 ~ _______
> Compare depois com os resultados exatos.

Outro tipo de experiência pode ser do mundo físico ou comercial.

f) *Estruturar a aprendizagem de algumas técnicas "institucionais" de cálculo mental ao longo do 1º grau*, sem que isso implique que não se possam usar técnicas "pessoais".

g) *Os estudantes devem enfrentar situações nas quais apareçam conflitos que possam ser resolvidos numa atividade coletiva, como comunidade aritmética na classe que comunica suas descobertas. A expressão verbal deve ser dominante sobre qualquer outra.*

As palavras que são usadas para expressar conteúdos, raciocínios e conversações aritméticas têm significados ambíguos em muitas ocasiões. Os símbolos têm também diversos significados e usos distintos. Com efeito, se perguntamos às crianças, "Que diferença há entre 6 e 13?", algumas dirão 7 (entendem subtração), outras dirão que um tem um número e o outro dois (o que não está certo, porque são "algarismos"!). 3/4 pode ser o resultado de um jogo, 3 gols a 4, ou dois números separados com uma barra (falsa concepção de fração). As palavras são muitas vezes usadas de formas diferentes da que o professor esperava... Mas, junto com os símbolos, fazem parte da linguagem que expressa o aritmético e deve-se considerar que, às vezes, elas criam dificuldades.

Para fomentar o uso da linguagem devemos *introduzir situações provocadoras, as mais motivadoras possíveis, que fujam das perguntas clássicas e convidem à produção*: a) de histórias com perguntas abertas, às quais é preciso responder; b) de histórias em quadrinhos sem desfecho, que devemos completar; c) de situações em que nos colocamos "no lugar do outro" ("faça de conta que é Pitágoras e descreva sua descoberta"); d) de encaminhamento de um diálogo com alguém que não está presente (como explicaria algo a seu amigo por carta?).

❑ *Avaliando o aritmético*

Uma forma de estabelecer um resumo de todas as idéias expostas é falar delas considerando-se uma perspectiva de avaliação. Isso implica reconhecer objetivos que correspondam aos princípios da chamada "nova aritmética" para iniciar o século XXI e a maneira de conduzir sua implementação. Mais ainda, significa indicar uma forma de acompanhamento continuado do desenvolvimento implementado na sala de aula, e de analisar o que acontece com o conhecimento dos estudantes e as crenças do professor, o que se relaciona com o que há de formativo na avaliação.

Os objetivos principais a que se propõe o ensino da aritmética são os seguintes, sem que a ordem indique maior ou menor importância ou implique uma seqüência determinada:

1) Desenvolver uma capacidade mínima de interpretar o que há de aritmético em determinadas situações reais; isso implica usar de forma ágil linguagens diferentes;
2) Integrar e dominar alguns processos gerais aritméticos que permitam a resolução de situações mediante métodos diversos (planificação, uso de referenciais externos à situação, cálculo de diversos tipos, técnicas esquemáticas etc.);
3) Dominar algumas bases conceituais importantes, reconhecendo sua aplicação em situações concretas;
4) Adquirir um sentido numérico o mais geral possível, que permita flexibilizar as técnicas e os conteúdos que se conhecem e reconhecer quando cada uma é mais útil e adequada;
5) Ser capaz de produzir hipóteses diante de problemas, vinculando as justificações necessárias a diversos raciocínios (aditivo, multiplicativo, proporcional etc.);
6) Adotar as mudanças de atitudes necessárias para levar tudo a cabo.

É possível expressar os princípios e as idéias expostos até aqui na forma de um programa para a educação aritmética básica, mas não vamos fazê-lo. Em vez disso, preferimos considerar apenas que é preciso avaliar o trabalho dos estudantes dentro de um tal programa, e, embora isso seja difícil, o certo é que muitas das atividades propostas ao longo destas páginas, como exemplos, podem permitir analisar o progresso quanto à aquisição de técnicas, à observação da melhora no sentido numérico, ao domínio de fatos ou sistemas conceituais e à avaliação de atitudes. Certamente, é difícil falar de requerimentos gerais para todos os níveis educacionais; não existem exemplos de avaliação genéricos, e ela se deve adaptar ao conteúdo, ao interesse, à motivação e à linguagem próprios de cada nível. As técnicas e os instrumentos de avaliação são diversos, de acordo com o que se deseja avaliar; entre esses, distinguimos situações procedimentais, conceituais ou de investigação.

❑ *Resumindo de forma breve*

Conseguir um bom trabalho aritmético implica, para a tarefa do professor: a) reconhecer a necessidade de uma mudança curricular que sirva para desenvolver um sentido numérico, ou seja, colaborar para que o estudante seja capaz de interpretar e formular textos numéricos, reconhecer visualizações, relacionar ao máximo os conteúdos que conhece na prática situada de cada momento, utilizar métodos originais para distintos tipos de situações, avaliar se são razoáveis e eficazes etc.; b) integrar diversos tipos de raciocínio na produção de conjecturas ante os problemas apresentados, superando os erros, as dificuldades e os obstáculos; c) assumir o papel dos distintos cálculos, que não se reduzam à obtenção de resultados, e contribuam para aprimorar processos como planificar, desenvolver estratégias diferentes, selecionar as mais adequadas etc.; e, por último, d) fomentar uma avaliação que contemple a regulação e o controle constante do processo de ensino proposto.

3
SOBRE A ÁLGEBRA

No capítulo anterior, falando da aritmética, nosso foco estava principalmente em discutir o que seria um sentido numérico adequado a nossos tempos (e os próximos), e de que forma seria possível implementar uma tal visão na escola.

No caso da álgebra, teremos de adotar um caminho um pouco diferente, pelo menos em princípio, e o motivo é o seguinte: por incrível que pareça, não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente. Há, é verdade, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo, mas mesmo aí há diferenças — gráficos são ou não parte da álgebra?

O problema de um consenso construído assim, com base em conteúdos, é que podemos saber que isto ou aquilo "é" álgebra, e trabalhar estes conteúdos, mas não podemos saber duas coisas fundamentais: a) se há outros tópicos que deveriam também estar ali; e, b) fica difícil saber de que forma organizar um currículo para a educação algébrica, e até mesmo se os tópicos tradicionais são tão relevantes quanto sua inclusão tradicional em currículos parece indicar.

Bem mais do que no caso da aritmética, as diferenças encontradas em relação a concepções de educação algébrica têm raízes em diferentes conceitualizações da atividade algébrica. O que faremos, então, é o seguinte. Primeiro examinaremos uma série de idéias e trabalhos ligados à atividade algébrica e à educação algébrica, e apenas então iremos introduzir uma perspectiva nova para esse tema, e uma forma possível para sua implementação.

❑ *As diversas concepções da atividade algébrica*

Parte do trabalho de caracterizar a atividade algébrica é dar uma "descrição" de posse da qual possamos identificar essa atividade quando ela acontece. Outra parte, mais complicada, é tentar saber se há — e quais seriam, então — processos cognitivos peculiares a essa atividade.

As tentativas mais superficiais de descrever a atividade algébrica têm em comum o fato de ficarem apenas na primeira parte do trabalho; a associação com conteúdos é imediata, e a caracterização pára por aí: atividade algébrica é resolver problemas da álgebra (resolver equações, por exemplo), sejam eles problemas "descontextualizados" ou parte da solução de problemas contextualizados. Em resumo, a atividade algébrica é descrita como "fazer ou usar álgebra". A versão mais banal dessa posição é a que descreve a atividade algébrica como "calcular com letras".

É claro que dizer que "a atividade algébrica é calcular com letras" é uma tolice, mas há uma outra face dessa obsessão por letras, e que tem expositores e defensores ilustres. A idéia central, nessa linha de pensamento, não é simplesmente adotar uma caracterização da atividade algébrica como "cálculo literal", mas buscar mostrar como uma suposta linha de desenvolvimento histórico da álgebra pode ser retraçada seguindo o desenvolvimento das "notações algébricas".

De forma bastante breve, essa linha seria a seguinte: começamos com os babilônios e os egípcios (cerca de 1700 a.C.), que desenvolveram regras eficientes para cálculos vários e para a resolução de problemas, embora não tenham desenvolvido notação alguma para apresentar essas regras de forma geral. Dali, salta-se quase 2 mil anos, direto para o grego Diofanto (por volta do ano 250); sua grande criação é vista como sendo a introdução de um sinal especial para a incógnita em uma equação, e uma escrita das equações que pode ser interpretada como algo que se parece um pouco com a nossa.[1] O próximo salto é de "apenas" 1400 anos, menor do que o anterior, mas, em muitos sentidos, bastante mais radical: vamos direto até o francês Vieta (cerca de 1550), o primeiro a sistematizar o uso de letras para representar também os dados (valores conhecidos) em uma expressão algébrica; para os que seguem essa linha de pensamento, o que Vieta introduz é um cálculo com letras (que representam quantidades ou grandezas geométricas), cálculo esse que tem suas regras próprias, compatíveis, é claro, com as noções usuais da aritmética e da geometria.

O próximo — e supostamente último — passo, seria a gênese da noção de estrutura algébrica, primeiro com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829), de forma "implícita", até chegarmos a Bourbaki (a partir de 1940),[2] e aí entramos no domínio próprio do "cálculo com letras", mas num sentido bem mais sofisticado, o da *sintaxe*: um cálculo com regras próprias e ignorantes de qualquer sistema particular que funcione como elas (números, por exemplo). Um mundo, enfim, completamente "abstrato".

1. Diofanto usava, por exemplo, um sinal especial para a igualdade.
2. Nicolas Bourbaki foi o nome escolhido por um grupo de matemáticos franceses que, a partir de 1940, trabalharam para colocar toda a matemática em bases axiomáticas. As "estruturas-mãe" que tomam como ponto de partida (de ordem, topológicas e algébricas) deram a Piaget as estruturas básicas do pensamento — segundo suas teorias.

Essa visão, a de que a introdução de notação especial (no caso, letras) corresponde diretamente a determinadas mudanças conceituais, e, mais do que isso, que essas mudanças sinalizam claramente um estágio de "desenvolvimento" da atividade algébrica, continua a ter implicações nas idéias de pesquisadores em Educação Matemática. Notações são mais ou menos *adequadas* em uma certa atividade, mas isso depende fundamentalmente dos significados em jogo; mais adiante, voltaremos a esse tema.

O inglês Eon Harper, por exemplo, publicou, em 1987, o artigo *Fantasmas de Diofanto*,[3] que teve considerável influência em outros autores. Nesse artigo, Harper toma a idéia, apresentada por G.H.F. Nesselmann em 1842, de que poderíamos classificar a álgebra, em seus vários momentos históricos, em *retórica* (apenas palavras), *sincopada* (alguma notação especial, em particular palavras abreviadas) e *simbólica* (apenas os símbolos e sua manipulação). Enquanto para Nesselmann essa era simplesmente uma postura descritiva, Harper introduz a noção de que ela corresponderia a algo mais. Em seu *Fantasmas de Diofanto*, ele argumenta (inclusive com dados de entrevistas clínicas), que de retórico a sincopado e a simbólico haveria um correspondente desenvolvimento intelectual. Harper tomou, para seu estudo, um problema que já aparece na *aritmética* de Diofanto:

> *Mostre que, se você souber a soma e a diferença de dois números, é sempre possível descobrir os números. Dê sua resposta da forma mais geral possível.*

Este problema foi dado a crianças de várias idades, e três tipos básicos de respostas apareceram:

3. Título original em inglês, *Ghosts of Diophantus*, publicado no *Educational Studies in Mathematics*, nº 18 (1987).

1) Totalmente verbais, por exemplo: "Você pega a diferença e tira da soma, e depois divide o resultado por dois; esse é um dos números. Para achar o outro, soma a diferença ao primeiro". Essas seriam as soluções retóricas.
2) Depois de escolher valores particulares para a soma e a diferença (por exemplo 10 para a soma e 2 para a diferença), a criança montava e resolvia um sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Essa seria a solução sincopada.

3) A criança montava e resolvia o seguinte sistema (a menos de escolha de letras):

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Na visão de Harper, cada tipo de solução indicava um estágio de desenvolvimento intelectual.

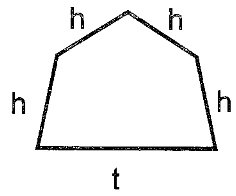
Antes de Harper, um outro estudo, conduzido por Dietmar Küchemann na Inglaterra, também teve grande impacto.[4] Utilizando um grande número de questões simples, como,

Se $a + b = 43$, então $a + b + 2 = \ldots$?

e

Escreva uma expressão para o perímetro da figura a seguir:

4. Esse estudo era parte de um outro, mais amplo, chamado *Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS)*, coordenado por Kathleen Hart entre 1974 e 1979. Os resultados foram publicados em 1981, no livro *Children's understanding of mathematics: 11-16* (Londres: John Murray).



O estudo terminou por trazer duas sugestões centrais. Primeiro, que havia uma correspondência entre as idades dos alunos e o nível de acerto para cada questão, que parecia corresponder aos níveis de desenvolvimento intelectual indicados por Piaget.[5] Segundo, que partindo da idéia piagetiana de que o desenvolvimento intelectual depende de um processo de maturação (eminentemente biológico), de forma que há um limite objetivo para o quanto se pode "apressar" esse desenvolvimento, surgiu a sugestão de que o ensino-aprendizagem da álgebra na escola deveria ser iniciado apenas de forma bastante tardia (por volta dos 14-15 anos de idade). O projeto CSMS teve grande repercussão na Inglaterra, e a segunda sugestão contida no trabalho de Küchemann foi seguida, com efeitos bastante adversos, pelo sistema escolar inglês. O resultado geral foi uma geração ou mais de alunos que terminavam o equivalente ao nosso ensino fundamental sem qualquer educação algébrica, ou, no máximo, no caso dos alunos classificados na faixa superior em matemática, com uma formação bastante superficial. Ainda hoje, a universidade inglesa sente o efeito desse processo sobre alunos ingressantes.

Embora distinto em interesse e método do estudo de Harper, o trabalho de Küchemann compartilha com aquele a crença no fato

5. Não temos espaço para apresentar exemplos mais completos das questões, mas talvez baste dizer que, para cada "tipo" de questão, como as duas que apresentamos, havia, na verdade, quatro ou cinco questões, construídas de modo a constituir, segundo os pesquisadores, uma seqüência de dificuldade crescente e com características tais que esta ou aquela competência intelectual seria necessária para resolvê-la. O plano geral segue, evidentemente, uma tradição piagetiana.

de que, de algum modo, seguir a trajetória do uso de letras permite seguir a trajetória do desenvolvimento de um pensamento algébrico.[6]

A crítica mais contundente a estudos que seguem essa tradição, exemplificada em Harper e Küchemann, é que ignoram o fato — que já indicamos na Introdução e anteriormente nesse capítulo — de que a álgebra, incluindo aí qualquer tipo de "cálculo com letras", é assunto praticamente exclusivo do domínio da escola, e que é provável que estudos assim estejam investigando, na verdade, um efeito bastante particular: as crianças que já passaram por processo de ensino-aprendizagem ligado a um tema deveriam naturalmente ter mais sucesso em situações que envolvam esse tema. No entanto, a possibilidade de que os resultados indiquem não haver progresso em relação ao nível de escolarização impossibilita afirmar essa crítica de forma mais forte apenas com base numa consideração acerca do que se ensina na escola.

Partindo de uma posição semelhante a essa que colocamos, a pesquisadora australiana Lesley Booth perguntou-se se os erros cometidos pelos alunos de uma faixa etária eram de fato efeitos de um estágio de desenvolvimento intelectual; em termos mais técnicos, ela resolveu investigar se aqueles erros eram ou não *resistentes à instrução*.[7]

O procedimento é fácil de entender. Um grupo de alunos foi testado usando as mesmas questões de Küchemann. Identificados os erros, alguns dos mais típicos foram selecionados, e desenvolvi-

6. A análise dos resultados é feita primordialmente em torno de seis categorias: dar valor numérico particular à letra, letra ignorada ou não usada, letra usada como objeto, letra como incógnita específica (um número desconhecido, mas particular), letra como número generalizado, letra como variável. Essa idéia surge, ao menos em parte, como uma tentativa de afirmar que a tradicional caracterização das letras em álgebra, apenas distintas entre variável e parâmetro, não era suficiente para entender os processos subjacentes à atividade dos alunos.

7. O trabalho completo está publicado em *Algebra: Children's strategies and errors* (NFER-Nelson, 1984).

das seqüências didáticas dirigidas especificamente a permitir que os alunos aprendessem o que aparentemente não sabiam. As seqüências foram utilizadas, e um pós-teste aplicado para verificar que tipos de erros persistiram. Resultados claros emergiram, indicando que alguns dos erros mais tipicamente apontados em Küchemann, como erros de desenvolvimento, não resistiram "à instrução".

O caso que se tornou mais conhecido foi o relativo à "não-aceitação da falta de fechamento". Essa expressão se refere ao momento quando os alunos enfrentam uma questão como,

$$\textit{Se } e + f = 8, \textit{ então } e + f + g = \ldots ?$$

E, recusando-se a aceitar a expressão "8 + g" como resposta válida, produzem respostas como "12" (assumindo cada letra igual a 4). A expressão vem, então, de que "8 + g" não é "fechada", pois não corresponde a um único resultado: ainda há "coisas a fazer". Essa "não-aceitação da falta de fechamento" é uma noção elaborada pelo psicólogo e pesquisador australiano Kevin Collis, e tomada como característica de um estágio de desenvolvimento intelectual dentro de seu modelo. Booth mostrou que essa "não-aceitação" resistiu muito pouco à instrução, abrindo caminho para outras críticas.

Para fechar nossas considerações sobre essa tendência "letrista": a idéia de seguir os passos do pensamento algébrico por mudanças na notação deixa de fora, no caso da história, a álgebra islâmica medieval (a partir de al-Khwarizmi), e quase tudo da matemática chinesa clássica. Em ambos os casos, ainda que por motivos bastante diferentes, não encontramos nem mesmo os primeiros passos dados por Diofanto em relação à notação. No caso da álgebra islâmica, porque todo tipo de abreviação era estritamente proibida, dado o papel quase sagrado das palavras,[8] e, no caso da matemática chinesa clássica, porque estando organizada em torno de métodos, preferia recursos particulares em cada caso, como em relação a uma forma de zero que aparece na resolução de "sistemas lineares", mas não em outros métodos.[9]

8. O que não quer dizer que outros recursos não houvessem sido desenvolvidos. Al-Khwarizmi, por exemplo, faz um magnífico uso dos números e de características do sistema decimal para suprir essa impossibilidade.

Essa é uma grande perda, porque o que temos nesses dois casos são conceitualizações que não são redutíveis a outras, por exemplo, a de Diofanto. Não é possível ver al-Khwarizmi nem como uma "evolução" em relação ao trabalho de Diofanto nem como "contido" em Diofanto. Do ponto de vista da técnica, a *álgebra* de al-Khwarizmi é muito mais pobre do que a *aritmética* de Diofanto, mas o que é feito em al-Khwarizmi não pode ser encontrado em Diofanto. Por exemplo: a *álgebra* contém, pela primeira vez conhecida, uma sistematização da parte "teórica", que é apresentada *antes* de ser aplicada a problemas particulares (nesse caso, problemas marcadamente práticos), mas na *aritmética* o que encontramos é uma sucessão de problemas resolvidos, ao longo dos quais técnicas diversas vão sendo introduzidas. E ainda: em al-Khwarizmi associam-se números a grandezas geométricas (segmentos e áreas), como fazemos hoje, mas em Diofanto isso é *impossível*; em al-Khwarizmi, fala-se do número , mas em Diofanto isso não é número. No livro *Em honra do espírito humano*,[10] o conhecido matemático francês Jean Dieudonné diz, com impressionante falta de profundidade, que al-Khwarizmi foi "autor de obras de astronomia e de um tratado de álgebra *sem originalidade...*" (grifo nosso).

Já havíamos dito, no começo deste capítulo, que, caracterizar a atividade algébrica apenas do ponto de vista de uma descrição levava naturalmente a uma associação imediata a conteúdos, e o caso de Dieudonné é excelente exemplo disso: a *álgebra* de al-

9. Com as aspas em "sistemas lineares", queremos indicar que essa expressão é usada apenas para facilitar a leitura. Na matemática chinesa, esse objeto não existe como o constituímos hoje, independente do problema que o origina e do método que se aplica a sua resolução.

10. *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987.

Khwarizmi não tem "originalidade" porque não contém nenhum resultado novo em relação aos que vieram antes dele. O que fica claro é que é preciso ir além de uma caracterização superficial.

Temos, até aqui, duas grandes linhas em termos de caracterização da atividade algébrica. Por um lado, aqueles que a caracterizam pelo uso de determinadas notações e, por outro, aqueles que a caracterizam pela presença de certos conteúdos (temas). Em comum, elas têm o fato de que se detêm na primeira parte do que dissemos ser a tarefa de caracterização: detêm-se apenas em oferecer uma descrição. O que podemos fazer, de imediato, é discutir até que ponto essas caracterizações são adequadas.

Há uma situação que parece causar problemas para as duas vertentes que examinamos até agora: se, diante da "conta",

$$\frac{5+5+5}{3}$$

alguém diz, "o resultado é 5", estamos ou não diante de atividade algébrica? Dos dois pontos de vista, a resposta deve ser "não": não há notação literal (talvez querendo dizer com isso que não há variáveis), e o conteúdo é tipicamente aritmético e não algébrico. Acrescentamos agora a seguinte informação: a pessoa pensou que são quatro cincos, e depois vai-se dividir por quatro, de modo que uma coisa "compensa" a outra, e o resultado é 5. Mais ainda: se mil "contas" do tipo,

$$\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{\text{n vezes}}}{n}$$

fossem dadas, a pessoa responderia sempre com base nessa mesma idéia, embora talvez jamais lhe ocorresse explicitá-la nem muito menos empregar a sofisticada notação acima. Ainda que essa pessoa mostrasse ter consciência da generalidade do que está afirmando, teríamos um problema: a atividade algébrica estava também lá, quando ela "fazia a conta" usando essa idéia geral, ou apenas quando ela a explicitava?

Se a pessoa for um aluno de 4ª série, certamente iremos querer que ela explicite sua consciência do fato de que a idéia é geral, mas se a pessoa for um matemático, é provável que baste ele falar dos "quatro cincos" para que nos convençamos de que ali sempre esteve em jogo o algébrico (por mais elementar que seja).

Mais adiante, discutiremos essas e outras questões em detalhe, de modo que podemos encurtar um pouco a conversa, dizendo o seguinte: parece que podemos ter, no mínimo, grandes suspeitas de que as caracterizações por conteúdo ou por notação deixam de fora coisas que gostaríamos de caracterizar como atividade algébrica.

Podemos ampliar a lista de "conteúdos legítimos" da atividade algébrica, mas, como vemos nesse caso, continuaríamos dependendo de mais informações sobre como a pessoa pensou ou quem ela é, para que possamos conferir *status* de atividade algébrica a um episódio desses.

Podemos, agora, considerar um terceiro ponto de vista, que diz que a atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal.[11] Podemos considerar que o pensamento formal *é* algébrico, caso em que todo o pensamento de alguém que atingiu o estágio operatório formal constituiria alguma atividade algébrica,[12] mas isso nos deixa com um horizonte inaceitavelmente amplo. Talvez devamos nos restringir, no caso da atividade algébrica, ao pensamento que opera sobre as operações (concretas) aritméticas, o que nos deixa com a noção de álgebra escolar como

11. Como em Piaget, o pensamento formal "Consiste em refletir as operações (concretas), portanto, em operar sobre operações ou sobre os resultados e, conseqüentemente, em agrupar operações de segundo grau" (conforme Battro, em seu *Dicionário terminológico de Jean Piaget*, Livraria Pioneira Editora, 1978).

12. Valerie Walkerdine nos chama a atenção para o fato de que, para Piaget, "matemática *é* pensamento".

aritmética generalizada, e, outra vez, com uma caracterização dependente de conteúdos. Na dissertação de mestrado de Paulo Sérgio de O. Neves (defendida na Faculdade de Educação da USP em 1995), o leitor encontrará uma afirmação dessa posição.

No caso da álgebra abstrata, estaríamos ainda pensando sobre operações, só que agora essas operações já não podem ser chamadas de "concretas", a menos que, eventualmente, num sentido de "familiares", já que elas são conhecidas não nos "resultados" que produzem, mas apenas em suas propriedades operatórias.

Parece-nos que essa abordagem também deixa coisas demais de fora. Por exemplo, se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o *status* de atividade algébrica? O que dizer de Diofanto, para quem número, seguindo a tradição aristotélica, era obtido por abstração, no processo de contar uma coleção (medi-la com uma unidade)? Deveríamos dizer que a *aritmética* não envolveu nenhuma atividade algébrica? Em seu livro *Psicogenesis y história de la ciencia*, Rolando Garcia e Jean Piaget negam ao trabalho de Diofanto o *status* de "álgebra", preferindo começar com Vieta; longe de ser simplesmente uma posição mal-informada ou "equivocada", ela reflete as conseqüências da caracterização que aqueles autores adotam.

Das três linhas que examinamos até aqui, duas — a que se centra em conteúdos e a que se centra em notações — parecem buscar uma caracterização que podemos chamar de *externalista*, ao passo que a última busca uma caracterização *internalista* (embora ainda na dependência de um elemento exterior para tornar-se útil).

Há, no entanto, todo um conjunto de outras abordagens que poderiam ser agrupadas por uma característica comum: substituir as descrições normativas por descrições que especialistas (*experts*) efetivamente fazem. David Kirshner, por exemplo, sugere que nem sempre interpretamos as operações algébricas

como binárias, e sugere que produzamos — por um exame da prática de especialistas — uma nova "gramática algébrica"; em particular, Kirshner defende que seres humanos não processam a álgebra seguindo regras — como faz parecer a visão normativa da atividade algébrica —, e, sim, segundo uma atividade de reconhecimento de padrões. Dessa forma, ele argumenta, pode-se entender a aplicação incorreta de uma propriedade distributiva como em "$(a + b)^2 = a^2 + b^2$".

Paolo Boero examina a atividade algébrica em termos de seus processos centrais e, embora haja um componente de "conteúdo", este fica implícito: os episódios tratados envolvem sempre um certo tipo de conteúdo, mas nada se diz sobre esses processos só acontecerem ali. Podemos, talvez, chamar essa corrente de *pragmática*, observando que seus membros estão particularmente interessados em como levar pessoas a aprender a operar como o especialista opera. Ele se interessa pelos processos de antecipação e transformação. De forma simplificada, seriam o processo de decidir que transformações são requeridas num determinado ponto da atividade algébrica (e efetivá-las) e o processo de antecipação, que consiste em "antever" aonde quero chegar, de modo que as transformações aplicadas não o são "às cegas".

Quando dizemos que essas abordagens buscam descrições não-normativas, estamos querendo dizer que elas se caracterizam por recusar o texto da matemática acadêmica como referência para o que a atividade algébrica deveria ser — como encontramos em Piaget, por exemplo, quando ele adota a formalização da matemática por Bourbaki como ponto de referência para suas estruturas do pensamento —, adotando, em vez disso, a postura de descrever como essa atividade se dá "de fato". O paralelo que nos ocorre é com I. Lakatos, que recusa a idéia de que a matemática é produzida na forma de proposições e demonstrações — a forma na qual ela é finalmente apresentada —, preferindo dar conta do processo de geração mesmo das conjecturas que eventualmente se tornarão teoremas.

No caso de Boero, seu tratamento do assunto emerge do interesse em produzir uma abordagem flexível para a educação matemática na sala de aula, baseada principalmente em projetos investigativos, e em sua percepção de que deve estar disponível, para os professores, uma forma de ler os processos em jogo dentro desses projetos, de modo que possam, mesmo num ambiente "aberto", ler os processos de aprendizagem em andamento. Nisso estamos de inteiro acordo com Boero, como ficará claro mais adiante.

Para os que seguem essa linha que chamamos de pragmática, a atividade algébrica caracteriza-se pela presença de certos processos aplicados a certos conteúdos. Por exemplo, a antecipação de que nos fala Boero pode ser encontrada em muitas outras atividades humanas, sendo parte de um processo mais geral de planejamento de uma ação, mas quando aplicada com a intenção de dirigir transformações algébricas, ela adquire características particulares, como, por exemplo, trabalhar sobre a *forma* das expressões em jogo.

É importante notar, por outro lado, que, ao observar e descrever esses processos e a forma como acontecem em relação às coisas da álgebra, não se está buscando descrever os "mecanismos mentais" subjacentes a esses processos nem reduzi-los a processos mais elementares. Às vezes, o interesse é produzir uma descrição técnica e precisa — como em Kirshner —, às vezes, é produzir uma leitura da atividade algébrica que inclua tanto elementos heurísticos (as antecipações) quanto elementos "técnicos" (as transformações) — como em Boero.

Uma quarta e última visão que mencionaremos é a proposta por G. Vergnaud, psicólogo francês. Vergnaud elaborou o que chama de Modelo dos Campos Conceituais, no qual a noção de conceito (isolado) é substituída pela de campo conceitual. Um campo conceitual é constituído por: a) um conjunto de esquemas operacionais e de invariantes; b) um conjunto de formas notacionais; e, c) um conjunto de problemas que, a um mesmo tempo, são resolvidos por aqueles esquemas e dão sentido a eles. A noção de campo conceitual desenvolveu-se como uma extensão das abordagens piagetianas, em particular para tentar resolver dificuldades percebidas com aquelas. No Brasil, o nome de Jorge Falcão (UFPe) pode ser identificado como o mais autorizado seguidor da abordagem desenvolvida por Vergnaud, e o leitor pode interessar-se em consultar, por exemplo, seu capítulo no livro *Tópicos em psicologia cognitiva* (organizado por Maria da Graça Dias e Alina Spinillo, Ed. Universitária UFPe, 1996).

Pode-se falar de um "campo conceitual da álgebra elementar", mas, sendo uma unidade muito ampla para a investigação experimental, Vergnaud e seus seguidores preferem tratar, por exemplo, de um "campo conceitual das equações de 1º grau (lineares)". Alguém trabalhando nesse ou em outros campos conceituais da álgebra estaria engajado em atividade algébrica. Deve-se observar que não se trata de uma caracterização por conteúdos — embora faça referência a eles — nem de uma caracterização por notação — embora faça referência a ela.

É essencial notar, no entanto, que o modelo de Vergnaud é normativo, isto é, ele *determina* um campo conceitual *em relação ao qual* atividades são propostas e desempenhos considerados. A solução (correta) de equações lineares só poderia se dar ao colocar em jogo os elementos de um determinado campo conceitual, e esses elementos são certamente os da matemática acadêmica, os significados são sempre matemáticos, ainda que didaticamente se possa optar por outras "aparências" com as quais tratar da "essência", como é o caso da utilização de balanças de dois pratos nessa perspectiva. A noção de "teorema em ação", por exemplo, deixa bem claro esse aspecto do modelo de Vergnaud; se o aluno diz ou faz coisas "certas", estas são vistas da perspectiva de noções implícitas, e se diz/faz coisas "erradas", estas são vistas como falta de entendimento ou inadequação em termos de desenvolvimento.

Das linhas que examinamos, em relação a uma caracterização da atividade algébrica, fica evidente que todas se dirigem, de uma forma ou de outra, à sala de aula — mesmo no caso do modelo de Vergnaud, claramente dirigido a fornecer um instrumento para a sala de aula, para a assim chamada *Engenharia Didática* —, bastante popular na França, e acreditamos que não deveria ser de outra maneira. Acontece, no entanto, que esse olhar assim dirigido à sala de aula resulta em pontos de vista que dão conta do que é *o certo*, olhando aquele que ainda não atingiu esse ponto ideal sempre da perspectiva da *falta*. É como se todas essas abordagens buscassem produzir um "mapa" do que é a correta atividade algébrica, mapa esse segundo o qual professores e desenvolvedores curriculares se orientariam: os últimos elaborando maneiras consideradas adequadas de fazer com que os alunos cheguem a se engajar corretamente no que é tomado por atividade algébrica (correta), e os primeiros utilizando os mapas para saber "onde" os alunos estão e o que ainda *falta* a eles.

Posta dessa maneira, essa caracterização de abordagens que olham pela *falta* aplica-se não só a essas visões, mas a muitas outras, praticamente todas. O grande problema é o seguinte: olhamos para o aluno e, se ele se comporta de modo identificavelmente correto, sei que "está lá", sei onde ele está. Mas e se ele se comporta de maneiras "estranhas", divergentes em relação ao ideal? Onde está o aluno, então? Certamente não está em meu mapa. E pior: entregamo-nos à tarefa de "trazê-lo" para onde queremos, sem sequer sabermos onde ele está.

Propostas construtivistas piagetianas, por exemplo, talvez digam que não é "útil" saber onde o aluno está, já que não é possível, de todo modo, "conduzi-lo" no processo de aprendizagem, apenas estimulá-lo. Essas propostas estariam justificadas, *caso se mostrasse verdadeiro que a condução não é possível*, mas o que a pesquisa mostra é que é *possível e na verdade necessário*. É aqui, por exemplo, que se torna mais visível a diferença entre posições piagetianas e vygotskianas, mas não vamos nos aprofundar nesse tema.

O que parece ser necessário, então, é uma perspectiva de atividade algébrica que nos permita tanto saber qual é o ideal a ser atingido quanto ler *positivamente* o que uma pessoa está fazendo quando se engaja em atividade algébrica de forma "não-ideal" (e esse não-ideal deve necessariamente ir do quase-ideal ao completamente "incorreto").

Mais adiante, introduziremos uma proposta de leitura da atividade algébrica que atenda a esse importante objetivo, mas antes devemos examinar de que forma as linhas discutidas nesta seção se transformam em propostas para a sala de aula.

❑ *As diversas concepções da educação algébrica*

Uma de nossas metas neste capítulo é, aproveitando a riqueza do trabalho em torno do ensino-aprendizagem da álgebra, discutir também o fato de que propostas para a sala de aula resultam *sempre* de visões do que seja aquilo que queremos promover por meio do ensino. Uma forma de dizer isso é dizer que propostas para sala de aula não são nunca "neutras" ou "ingênuas" em relação a pressupostos de toda ordem: relativos à natureza de processos cognitivos, relativos à natureza dos objetos que ali são apresentados ou relativos a concepções de conhecimento, para citar apenas alguns aspectos envolvidos. Não vamos, é claro, escrever aqui um "tratado" sobre o assunto. O que fizermos dessa discussão, neste capítulo, será sempre a serviço de nosso objetivo maior, o de discutir uma abordagem para o ensino-aprendizagem da álgebra.

Podemos começar nossa discussão pelas tendências "letristas". Alguém que acredite que a atividade algébrica se resume a um "cálculo com letras", pode propor o que para a sala de aula? Talvez adote, seguindo algumas péssimas idéias encontradas em propostas para a educação aritmética, a prática de utilizar a "seqüência" *técnica (algoritmo)/prática (exercícios)*. Com toda a franqueza, isso é praticamente tudo que encontramos na quase total maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro, e essa é uma situação bastante ruim. O que é, talvez, até *pior* é que essa prática não se baseia em investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em uma tradição, tradição essa que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo — *inclusive no Brasil* — já mostraram ser ineficaz e mesmo perniciosa à aprendizagem.

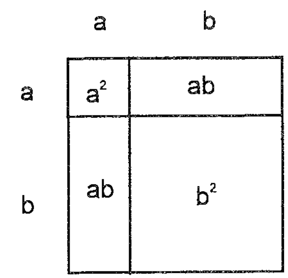
É preciso perguntar, então, por que essa prática é tão popular — e o é, pois de outra forma não seriam vendidos tantos livros que a adotam. Há a resposta usual , de que muitos professores, não estando "preparados", simplesmente seguem o que os livros oferecem, e que talvez não conheçam alternativas.

Por um lado, é verdade que ainda precisamos que as editoras e as universidades colaborem mais, para produzir material que ofereça alternativa ao que domina hoje, mas, por outro lado, é mais do que provável que a repetição dessa prática por tanto tempo, aliada ao fato de que o livro representa uma voz que se reveste de *autoridade*, termine por constituir, para a maioria dos professores, a noção de que a atividade algébrica *é* "cálculo literal", incluindo-se aí "cálculos" menos ou mais difíceis — entre estes últimos, por exemplo, a resolução de equações, vista apenas do ponto de vista dos algoritmos.

Há dois pontos importantes que queremos enfatizar em relação ao que dissemos nos últimos parágrafos. Primeiro, que seria ingenuidade pensar que a enorme aceitação dessas práticas "letristas" ocorre apenas por resignação dos professores: é preciso entender que elas correspondem bem a uma certa visão da atividade algébrica, caso contrário, não sobreviveriam. Em segundo lugar, e até como conseqüência do primeiro ponto, é preciso ter consciência de que qualquer proposta de mudança vai ter de passar por convencer muita gente de que a atividade algébrica não é "cálculo literal", e falamos aqui de fazer bem mais do que pressioná-los a mudarem a rotina.

Ainda numa linha "letrista", mas incorporando outros elementos, encontramos propostas que afirmam que a capacidade para lidar com as expressões literais vem por "abstração", por meio do trabalho com situações "concretas".

Os exemplos dessas abordagens são vários e atualmente bastante populares, por exemplo, o uso de áreas para "ensinar" produtos notáveis:



Ou o uso de balanças de dois pratos para "ensinar" resolução de equações.

Preferimos chamar essas abordagens de "facilitadoras", mas não num sentido muito otimista. Se, por um lado, é verdade que esses recursos parecem amenizar a tragédia que tem sido o ensino-aprendizagem nas escolas, especialmente por substituir a prática "letrista" tradicional por algo mais agradável, por outro lado, há diversos problemas. Em um estudo conduzido há alguns anos, a pesquisadora inglesa K. Hart e sua colega A. Sinkinson investigaram o que acontecia quando as crianças passavam de atividades "concretas" para outras "formais", mas relativas ao mesmo conteúdo. Um dos conteúdos escolhidos foi o de solução de equações. Para "surpresa" das pesquisadoras, as crianças — embora achando o material concreto "útil" — não viam relação entre o que haviam feito no "concreto" e o que haviam feito no "formal". A conclusão de Hart e Sinkinson foi a de que faltava um material intermediário, que "preenchesse o vazio" entre uma coisa e outra, nas palavras delas.

Nossa interpretação desses resultados é diferente. Acreditamos que a sugestão que fica é a de que talvez não haja mesmo ligação entre o que aconteceu no trabalho com o "concreto" e o que aconteceu no trabalho com o "formal"; talvez sejam, simplesmente, duas atividades distintas, com seus resultados localizados. O que pode parecer estranho nessa nossa conjectura é que nos é tão fácil "perceber" que trabalhar com balanças está "relacionado" com resolver equações: Por que a criança não "perceberia", já que foi capaz de trabalhar nos dois domínios? Mais adiante, exploraremos melhor essa questão, e mostraremos que há uma explicação clara e simples para o efeito que Hart e Sinkinson detectaram.

As abordagens "facilitadoras" baseiam-se, então, na idéia de que uma certa estrutura que é posta em jogo na manipulação de "concretos" é, depois, por um processo de abstração, transformada em "formal". Não vamos nos deter na análise das diversas formas de ver os aspectos cognitivos dessa "passagem"; vamos apenas insistir em que o que essas abordagens têm em comum é o fato de acreditarem que o que se dá no "concreto" é alguma forma implícita do que se dá no "formal". Como conseqüência, o trabalho no "concreto" deve preceder *necessariamente* o trabalho no "formal". O trabalho de Z.P. Dienes é um representante sofisticado dessa linha.

Há um grupo de educadores matemáticos que também tomam como ponto de partida o "concreto", mas em um sentido diferente. Para eles o "concreto" é visto como o real, e as atividades propostas são de investigação de situações reais ou "realistas".[13] Aqui situam-se as propostas baseadas em modelagem matemática (por exemplo, no Brasil, o trabalho de Rodney Bazanezzi) e as propostas baseadas em investigações (Paolo Boero na

13. A diferença é que uma situação realista é criada com finalidade didática, embora buscando o máximo de semelhança com o que poderia ser uma situação real. No outro caso, a situação é tomada do próprio cotidiano dos alunos (situações vividas, jornais, revistas ou TV, por exemplo).

Itália, Alan Bell na Inglaterra, e Jan de Lange na Holanda). De acordo com essas perspectivas, a educação algébrica se dá na medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como uma ferramenta e não como objeto primário do estudo. Num país como o Brasil, no qual a visão dominante é a "letrista", essas abordagens sofrem séria resistência: o "resultado" do processo de ensino-aprendizagem não é imediatamente visível nem diretamente dirigido às técnicas algébricas mais sofisticadas.

Em relação à caracterização da atividade algébrica, não há uma visão comum a todas essas abordagens, o que deixa à vista que é possível que o fator que primeiro identifica uma linha na educação algébrica não seja aquela caracterização: é preciso ir além da primeira impressão para identificar diferenças entre propostas similares.

Já falamos de Boero. Para Bell e para de Lange, a atividade algébrica é caracterizada por conteúdos — "fazer ou usar álgebra" —, embora na perspectiva deles seja menos importante dizer se a pessoa está ou não engajada em uma "atividade algébrica", e mais em fazer com que os alunos se tornem capazes de utilizar a matemática como recurso para "organizar o mundo".[14] Para Bazanezzi, a caracterização é por conteúdos, mas não no sentido de que uma dada situação admita somente "investigação algébrica": se o modelo é algébrico, então, há atividade algébrica; o foco é na motivação que a modelagem oferece e na possibilidade de os alunos se tornarem capazes de "aplicar" o que aprendem.

De modo geral, essas abordagens têm em comum o fato de propor que os alunos aprendam "em ação", um avanço bastante

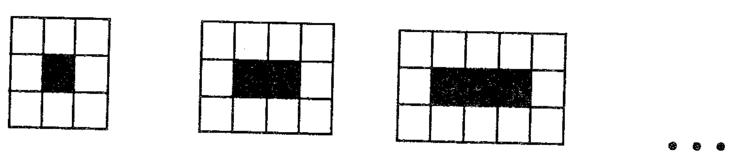
14. Há vários anos, Alan Bell trabalha, com seus colegas do Shell Centre for Mathematical Education, em um projeto dirigido a produzir material que permita aos alunos se tornarem conscientes dos processos envolvidos na atividade matemática, em particular na tomada de decisões em situações investigativas.

significativo em relação ao que é hoje dominante no Brasil e em outras partes do mundo, a prática de "técnica/exercício".

Um argumento dos que se opõem a propostas como as de Boero, Bell e de Lange, é que o professor não estaria qualificado para adotá-las. Esse argumento é falso, mas por um motivo nada evidente. À primeira vista, parece ser verdade que o professor precisaria ter formação e experiência excepcionais, mas o que não é bem compreendido é que faz *parte integrante* dessas propostas, que o professor *também* esteja se engajando em um processo aberto, e não apenas os alunos. Em outras palavras: não se espera que o professor domine completamente todas as possibilidades que possam surgir em uma situação investigativa, e, sim, que ele mantenha sua atenção no processo e de forma intelectualmente honesta, de modo que o que ele não souber (ou não entender) se torne motivo para *aprender* e não uma "falha", como se costuma considerar.

Examinemos a visão de educação algébrica ligada ao que se convencionou chamar de "álgebra como aritmética generalizada".

Historicamente, os expositores mais sistemáticos dessa proposta são os membros de uma equipe da Open University, da Inglaterra, liderados por John Mason. Essa equipe produziu o livro *Roots of/routes to algebra* (*Raízes da/caminhos para a álgebra*), no qual a idéia central é a de que a atividade algébrica se caracteriza pela *expressão da generalidade*. Essa generalidade se refere, por exemplo, à relação entre o número de ladrilhos brancos e pretos num padrão geométrico:



$$B = 2P + 6$$

Um aspecto-chave dessa abordagem representada pelo grupo da Open University é que a tendência "letrista" é de certa forma compensada por uma preocupação com a "linguagem algébrica" como *meio de expressão*, e não apenas como objeto a que se aplicam técnicas diversas. Como em outras abordagens de origem britânica, a preocupação maior não é com uma delimitação precisa do que é tratado em cada atividade proposta, e, sim, com o envolvimento dos alunos, ativamente, na organização de dados e no estabelecimento de relações, e na procura, quando necessário, de maiores recursos técnicos.

Quanto à abordagem sugerida pelo modelo de Vergnaud, acreditamos que é suficiente dizer que, em linha com a Engenharia Didática francesa, trata-se de propor aos alunos *seqüências didáticas*, cuidadosamente elaboradas para que se possa tratar de todos os aspectos considerados relevantes em relação a um tema. No caso das equações lineares, por exemplo, seriam considerados os conceitos de equação e de incógnita, o significado do sinal de =, a "homogeneidade" da equação com respeito a unidades de medida — aspecto ligado a problemas contextualizados —, e o que eles chamam de "comportamento de desvio" — ligado a "esquecer" o problema original e operar apenas com símbolos, sem se preocupar com "significados" para eles.

Embora naturalmente substanciada por resultados de pesquisa, é interessante observar que não é fácil perceber em que uma proposta como a colocada por Aníbal Cortez — colaborador de Vergnaud — difere substancialmente de propostas tradicionais bem organizadas. Isso poderia sugerir que a pesquisa é inútil, mas não é esse o caso. O que um modelo como o de Vergnaud traz — e que acreditamos devesse ser melhor explorado em propostas baseadas nele — é a complexidade do fenômeno, tornando inseparáveis aspectos como a notação e os conceitos, e enfatizando, por exemplo, que são *problemas* que permitem que se produza significado para aqueles, e vice-versa.

Em relação a visões de educação algébrica, paramos por aqui. Não esgotamos o assunto, nem em extensão nem em profundidade, mas julgamos que já temos o suficiente para o leitor certificar-se de que há uma grande variedade de abordagens e de que essas abordagens correspondem a visões do que seja a atividade algébrica e a toda uma gama de outros pressupostos, por exemplo, referentes ao papel da educação matemática escolar na formação global dos estudantes. Acreditamos que outras abordagens — das quais não falamos —, não têm diferenças tão grandes em relação às apresentadas, de modo que não valeria a pena tomar mais espaço com elas.

❑ *Uma outra leitura da atividade algébrica*

Quando olhamos para os distintos tipos de caracterização da atividade algébrica, encontramos desde a rigidez das caracterizações "puras" por conteúdos até uma certa despreocupação em identificar, do ponto de vista do conteúdo, que tipo de atividade matemática particular está acontecendo: basta que seja atividade matemática, rica e flexível.

É certo que, tratando-se da educação matemática escolar, não podemos esquecer de que há um saber institucional do qual esta deve *também* se ocupar. Se há propostas de educação algébrica que *parecem* não se preocupar com isso, é apenas porque seus defensores acreditam que, ao longo de um certo tempo, esse saber institucional tende a aparecer, "naturalmente" ou por direcionamento do professor, por meio da escolha das tarefas.

Um outro aspecto comum a quase todas as propostas para a educação algébrica, é que a atividade algébrica só é possível de forma tardia, em termos de idade. Essa crença, por vezes, apóia-se na idéia de que ela requer "pensamento operatório formal", por

outras, apóia-se na idéia de que é preciso *primeiro* aprender aritmética, e esta tomaria, então, os primeiros anos da educação matemática formal.

Vamos agora apresentar argumentos e evidências, mostrando que a idéia de uma iniciação tardia à atividade algébrica é equivocada e indesejável; no caminho, iremos apresentando nossa visão do que seja a atividade algébrica.

Podemos começar retomando certas considerações que fizemos no capítulo introdutório. Lá, discutimos o fato de que a própria atividade aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade. Há cerca de dez anos, David Wheeler já apontava para esse fato. Quando dissemos que a diferença entre álgebra e aritmética era de tratamento, de foco, estávamos sugerindo não apenas que uma se beneficia da outra, como também que uma *depende* da outra. O problema que aparece em tal formulação é o tradicional "do ovo ou da galinha": Por onde começamos? A "sabedoria" tradicional, o senso-comum da educação matemática, diz, como já sabemos, que é "óbvio" que começamos pela aritmética. Parece-nos, no entanto, que não há nada de óbvio nessa afirmação: como no caso dos estudos de Küchemann e de Harper, o óbvio aqui não parece ser mais do que tradição vestida de razão. O que precisamos fazer é entender de que modo álgebra e aritmética se ligam, o que elas têm de comum. Feito isso, teremos encontrado uma verdadeira raiz, o que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única.

Foi exatamente pensando nessa questão que o educador russo V.V. Davydov formulou um importante ponto com relação à atividade algébrica: esta tem seu ponto de partida na atividade de lidar com relações *quantitativas*. Posto dessa forma, pensando em "ponto de partida", estaríamos talvez confinados à álgebra dita escolar, mas iremos, mais adiante, mostrar que isso não é verdade.

O importante aqui é entender que Davydov estabelece, com essa afirmação, o fato de que, para ser capaz de resolver o mais simples dos problemas "aritméticos", a criança precisa também lidar — de forma tematizada ou não —, com as relações quantitativas envolvidas.

Um exemplo: diz-se a uma criança de 7-8 anos de idade, que, em um estacionamento, há carros e caminhões, num total de 13 veículos, e que os carros são 5. Quantos são os caminhões? A criança calcula, seja por que método for — contagem, algoritmo escrito —, que são 8 os caminhões. O que ela faz é tirar dos 13 veículos os 5 carros. Por quê? Essa pergunta nos leva a duas conclusões importantes. Primeiro, a criança deve necessariamente ter lidado com a relação *geral* de todo-parte envolvida na situação ("se do todo tiro uma das partes, o que sobra é a outra parte") e, segundo, e igualmente importante, a *lógica da operação (aritmética) realizada* é uma lógica de todo e partes: é esta que justifica aquela. Essa segunda conclusão pode parecer redundante, mas não é. O que é importante, aqui, é enfatizar que *toda operação é realizada segundo uma lógica, e que é essencial investigar essas lógicas se queremos entender as formas de pensar de nossos alunos.*

Voltando ao exemplo, o ponto-chave elaborado por Davydov é que, se falamos de quantidades específicas, é natural que os alunos voltem sua atenção para elas, mas se, em vez disso, ficamos com a situação *genérica,* é razoável que os alunos se voltem para ela.

É essencial estabelecer, de forma clara, a distinção entre "genérico" e "generalizado". A situação "generalizada" emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares (como no padrão de ladrilhos pretos e brancos), ao passo que a situação "genérica" emerge quando tratamos *diretamente* daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação dos casos particulares. Isso não quer dizer, é claro, que a situação genérica se constitua independentemente de qualquer caso particular (embora isso não seja nada improvável ou impossível!), e, sim, que, *no interior da atividade,* a atenção é diretamente

dirigida ao que é geral, e não ao processo de "generalização". Freudenthal já indicou que, muitas vezes, não se atinge a generalidade pela generalização.

Podemos pensar em exemplos não-matemáticos.

Quando olhamos para nuvens no céu, por exemplo, para tentar saber se vai ou não chover, e que tipo de chuva seria — tempestade ou chuva "calma" —, não recorremos explicitamente a nossa experiência anterior com nuvens — embora essa seja em geral relevante. Essa experiência se transforma em "regras" praticamente ("na prática") independentes dos casos anteriores, e nossa atenção é diretamente focada em comparar as nuvens de agora não com as que já vimos antes, mas, sim, com as "regras":

nuvens escuras = grande probabilidade de chuva

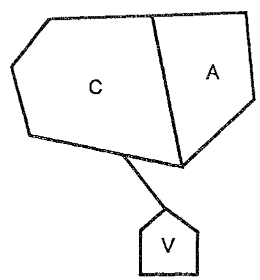
Ignoramos as particularidades, os muitos dias em que as nuvens estavam até mais escuras do que hoje, mas não choveu. Talvez haja um argumento "estatístico": "na maior parte das vezes..." Talvez haja algo mais.

Se fôssemos meteorologistas, é certo que não olharíamos apenas para a densidade das nuvens: procuraríamos saber da pressão atmosférica, por exemplo. Mas é exatamente aqui que volta a idéia de que é apenas no interior de atividades que a natureza de um procedimento pode ser esclarecida. Se alguém começa a falar de nuvens e chuva conosco, nesse momento, é pouco provável que nossa atenção se dirija a falar de que forma nossa experiência anterior se generaliza em nossa percepção atual. Mas se, por outro lado, a conversa se vira na direção de "causos", de situações específicas nas quais isto ou aquilo aconteceu, a natureza de nossas considerações muda. É pouco provável que alguém mencione, numa conversa *genérica,* o fato de ter visto chover sem que houvesse nuvens acima de sua cabeça, mas, numa conversa de "causos", essa é uma história com grandes chances de vir à tona.

De volta aos carros e caminhões. Se alguém começa a falar de casos específicos, é até possível que a criança se lembre de um estacionamento ao lado de sua casa, no qual não há caminhões... Mas se a conversa é dirigida a essa situação genérica (e *dada*), é como se entrássemos no mundo do faz-de-conta, e o que passa a interessar é a fala a respeito do que pode ser dito *de forma genérica* sobre tais estacionamentos. Por exemplo, é *óbvio* que, juntando carros e caminhões, teremos todos os veículos, e não seria jamais estranho *escrever*:

$$C + A = V$$

O que é que *justifica* essa *afirmação*? Talvez seja o diagrama,



ou um similar.

De toda forma, *é óbvio*. Se usamos "A" para caminhões — poderia ter sido qualquer outra letra — o problema a ser resolvido é que "carros" e "caminhões" começam com a mesma letra.

As *obviedades* podem continuar:

$$V - C = A$$

já que é óbvio que, se do todo *retiramos* os carros, sobram... os caminhões! E, por um motivo totalmente similar,

$$V - A = C$$

Esse pequeno exemplo, de carros e caminhões, é exatamente o princípio de uma atividade desenvolvida por Davydov. A situação é apresentada aos alunos, que são então levados ao tipo de "conversa" descrito. A notação pode logo ser sugerida pelo professor — e deve, a menos que algum aluno o faça —, mas há sempre espaço para discutir, por exemplo, a escolha das letras, e para discutir o significado dos sinais =, - e +.

Vamos nos deter um pouco e examinar melhor o que pode estar acontecendo aqui. São vários os pontos de grande importância:

1) Ao introduzir a notação "algébrica" e o diagrama todo-partes, o professor coloca, de imediato, sua intenção de que os alunos trabalhem com eles, isto é, que o utilizem para expressar coisas. A visão mais popular hoje de que essa notação "oficial" deve desenvolver-se lentamente, e com base nas notações particulares dos alunos, justifica-se no interior de uma tradição segundo a qual o desenvolvimento intelectual — e, portanto, a aprendizagem — dá-se "de dentro para fora". O trabalho de Davydov, completamente inserido na perspectiva de Vygotsky, parte de pressupostos bastante distintos: a constituição das formas típicas do pensamento humano dá-se primeiro no plano social, e apenas depois no individual, ao mesmo tempo em que o domínio de formas simbólicas passa por uma etapa na qual o sujeito as utiliza de maneira bastante "superficial".[15]

15. A discussão desta última afirmação não é de todo simples, mas podemos dar um exemplo: Vygotsky mostrou, por exemplo, que primeiro as crianças utilizam as palavras com um papel "indicativo", o que permite um certo tipo de interação com os outros, e depois o uso dessa palavra vai adquirindo outras características. É preciso entender, aqui, o papel da *autoridade* do outro nesse processo: é o outro que dá legitimidade para esse uso "mal compreendido, mas correto", e é *para falar para o outro* que primeiro aceitamos aderir a esse uso. Mais adiante, iremos ver de que forma esse mesmo mecanismo se aplica a situações mais complexas, nas quais a unidade já não é a palavra.

Juntos, esses dois pressupostos explicam porque a introdução da notação pelo professor não é indevida.

2) De que é que as crianças estão falando? Davydov chama essas expressões — "C + A = V", por exemplo —, de *relações quantitativas*, mas essa denominação precisa ser entendida corretamente. Para as crianças, "C" não é "o número de carros", e, sim, "os carros". É provável que, se elas pensassem em "número de carros", tivessem dificuldade com a situação, pois números àquela altura são sempre números *particulares*. O que permite que elas produzam significado para aquelas expressões é exatamente o fato de que carros e caminhões podem ser juntados e separados: *é essa a lógica das operações*. Quando Davydov fala que ali estão relações quantitativas, é porque ele acredita que *implicitamente* as crianças estão lidando com quantidades num sentido próximo de "número", mas nós discordamos dessa análise. Preferimos dizer que as crianças estão produzindo significado para aquelas expressões, mas não um significado numérico; elas não vêem ali "contas", e os objetos com que operam não são números. Duas coisas, no entanto, são certas: primeiro, *nós* somos capazes de produzir significado numérico para as expressões, e, segundo, os alunos e nós concordamos que aquelas expressões estão corretas (são adequadas, podem ser ditas).

3) Há um *núcleo* em relação ao qual um significado é produzido para cada uma das expressões, e nesse caso podemos pensar no núcleo como sendo constituído pelo diagrama todo-partes correspondente. Mais importante é o fato de que se estabelece, entre as três *afirmações* — "C + A = V", "V - C = A" e "V - A = C" —, uma relação, já que significados são produzidos com relação a um mesmo núcleo. Em outras palavras, reconhecer que a legitimidade de uma delas reporta-se ao *núcleo* pode implicar também a legitimidade das outras duas numa dada situação.

4) O ponto anterior tem pelo menos uma conseqüência bastante importante. O trabalho de diversos pesquisadores, em particular o de Gérard Vergnaud, a quem já mencionamos, sugere que há uma hierarquia de dificuldades entre os problemas ditos "aditivos" (que envolvem adição e subtração). Por exemplo, problemas como "Joãozinho tinha 5 bolas de gude e ganhou mais algumas, ficando com 12 bolas de gude. Quantas bolas Joãozinho ganhou?" são tidos como mais difíceis do que "Joãozinho tinha 5 bolas de gude e ganhou outras 7. Com quantas ele ficou?". Nas linhas da educação matemática habitual, esses problemas seriam com toda certeza ensinados em separado, cada um com sua própria maneira de resolver, e, com toda a certeza, o primeiro problema seria ensinado por último. Nós já apontamos para esse fato: não seria de se esperar que a solução do primeiro problema só fosse dominada de forma mais tardia que a do segundo? Esse não é um efeito de seqüência instrucional? A abordagem de Davydov nos coloca em situação bastante distinta. Uma vez explicitada a *afirmação* "5 + B = 12", para a qual se produziu significado em relação a um núcleo de todo-partes, põe-se imediatamente em jogo duas outras *afirmações*: "12 - B = 5" e "12 - 7 = B". Já mostramos de que forma a existência desse núcleo comum é fundamental aqui. A solução do primeiro problema não é imediata, mas a passagem da *afirmação* que o constitui para a *afirmação* que o resolve não deveria apresentar problemas: o que guia a escolha, o que caracteriza o processo de antecipação (como diz Boero), é o fato de que procuramos uma *afirmação* legítima e que nos indique um cálculo a ser feito.

Em outras palavras, do ponto de vista da proposta de Davydov, a hierarquia entre problemas aditivos — caso ela exista — é bem mais fraca do que sugerem estudos anteriores, e esse é um importante ponto para ser investigado.

5) Davydov enfrentou, dentro das escolas, resistência dos professores a suas propostas ("é muito difícil para as crianças"), apesar de ele ter mostrado experimentalmente que isso era falso. Como dissemos, as concepções que professores têm a respeito da educação matemática são bem mais do que simples "resignação" diante da ausência de alternativas: elas estão solidamente constituídas na prática desses profissionais. Nossas investigações e a de outros (por exemplo, Miriam Wolters, da Holanda) mostram que essa resistência se deve, na maior parte, à dificuldade dos professores em adotar uma nova perspectiva, diferente de "da aritmética para a álgebra", ou "aritmética é concreta, álgebra é abstrata (ou formal)".

6) O trabalho de Davydov mostra ainda que tematizar a *lógica das operações* subjacente a uma atividade não é necessariamente examinar o particular para abstrair o geral. Como Freudenthal indicava, e insistimos, "É possível atingir a generalidade diretamente, sem que haja generalização". É por isso que fazemos questão de estabelecer uma diferença entre o *genérico* e o *generalizado*. O que a proposta de Davydov mostra é que aquela tematização trata de *tornar legítimo falar sobre a situação genérica*: isso não resolve nenhum problema (particular), mas é de interesse na sala de aula.

Havíamos dito que o trabalho de Davydov estabelece uma raiz comum para a álgebra e a aritmética, e é importante explicitar que esta raiz comum é o trabalho com relações quantitativas. Observamos também que, para os alunos, não se tratava de "números". Isso nos traz a um passo importante: vamos, sim, dizer que os alunos estão trabalhando com relações quantitativas, mas tendo clareza de que afirmar isso quer dizer apenas que *para nós* pode-se produzir significado numérico para aquelas *afirmações*. A um mesmo tempo, isso nos permite identificar com clareza objetivos instrucionais bem mais importantes do que "conteúdos" — por exemplo, tornar possível que os alunos venham a dominar um certo tipo de pensamento, certas formas de produzir significado —, e nos permite falar dos significados que os alunos estão efetivamente produzindo — isto é, onde eles estão.

Na base desta nossa abordagem, está a noção de que para uma mesma *afirmação* é possível produzir distintos significados, o que implica que não basta que os alunos enunciem as mesmas afirmações que nós: continua sendo necessário investigar os significados produzidos. Isso derruba de forma categórica as posições "letristas", e revela que as posições "facilitadoras" ignoram o fato de que produtos notáveis como áreas e como manipulação simbólica guardam em comum apenas o texto da *afirmação*, mas não a *justificação* que torna sua enunciação legítima. Em outras palavras, de áreas para pensamento algébrico ou de balanças para pensamento algébrico há *rupturas*, e não "abstração" ou "passagem". Isso ficará bastante claro um pouco mais adiante.

Antes de avançarmos, gostaríamos de comentar sobre como Davydov via a relação entre sua proposta e a aprendizagem da aritmética.

Para Davydov, esse seu trabalho com crianças bastante jovens lançava as bases para um estudo mais sólido da aritmética. Por exemplo, a adição e a subtração eram vistas, desde o início, como operações inversas, mas também a multiplicação e a divisão; frações emergiam no contexto de divisões, e eram trabalhadas junto com estas, desde muito cedo. A idéia é que, em vez de pensar em uma aritmética de contas particulares, que depois seria "generalizada" em direção à álgebra, ele via uma aritmética que "punha em ação", em casos particulares, as propriedades de um sistema mais amplo, desenvolvido com base no estudo de relações quantitativas.

Talvez o leitor fique um pouco — ou muito! — chocado com essa total inversão, mas a crédito de Davydov existe não apenas o sucesso que ele e sua equipe tiveram, trabalhando com crianças de até 7-8 anos, mas também o fato de que sua proposta emerge com base nas reflexões teóricas e no trabalho experimental da forte escola soviética, iniciada por Vygotsky. Mais recentemente, estudos em uma direção semelhante foram feitos por outros pesquisadores (M. Wolters, na Holanda; R. Lins, no Brasil), confirmando que a perspectiva de Davydov é perfeitamente adequada para alunos bastante jovens.

❑ *Estendendo a abordagem de Davydov*

O que emerge com força da abordagem de Davydov é que há uma diferença entre resolver problemas (particulares) e falar sobre características (genéricas) de uma dada situação, por mais particular que ela seja. A palavra-chave é "falar".

Jerome Bruner, tomando emprestada uma idéia da lingüística, sugere que a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o "novo" e a silenciar o "dado". Dessa forma, enquanto resolvemos um problema, "falamos" as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas. O *insight* que essa comparação nos traz é que, enquanto a atividade de resolver problemas tem seu foco no "novo", a tematização da *lógica das operações* que mencionamos mais acima tem seu foco exatamente no "dado". Essa é a perspectiva que estabelece, definitivamente, nossa afirmação de que a atividade algébrica e a atividade aritmética acontecem juntas, embora em planos diferentes.

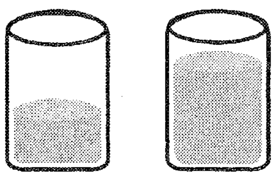
A principal característica da atividade proposta por Davydov é que nela uma situação é proposta, e o que se segue é que as pessoas *falam* sobre aquela situação. Por ser genérica, o novo não se refere a valores ou respostas "particulares", e, sim, a novas coisas que se pode dizer sobre aquele *tipo* de relação quantitativa.

O que parece ter escapado a ele, no entanto, é que relações quantitativas podem ser tratadas produzindo significado em relação a muitos tipos diferentes de núcleos. Por um lado, é inegável que um núcleo de todo-partes seja uma ferramenta extremamente poderosa, e que deveria estar tematizada por todos os alunos desde muito cedo. Por outro lado, é também verdade que outros núcleos não são redutíveis a esse, e que há afirmações — e, portanto, problemas — para os quais não se pode produzir significado em relação a um núcleo de todo-partes.

Um exemplo bastante dramático surge em problemas nos quais um dos elementos é um número negativo, por exemplo: "Em um certo jogo, Júlia completou 12 pontos em duas jogadas. Na primeira, ela fez 17 pontos. O que aconteceu na segunda jogada?" É evidente que uma parte não pode ser maior do que o todo, de modo que não se pode produzir significado em relação a um núcleo de todo-partes. Talvez alguns argumentem que é possível, sim, que a idéia de parte pode ser estendida para acomodar "partes negativas". É verdade, mas isso implicaria a substituição do diagrama como núcleo pelas três afirmações básicas como núcleo: "$C + A = V$", "$V - C = A$" e "$V - A = C$". O fundamental é que, embora *pareça* o mesmo núcleo, não é, não só em sua forma superficial, mas em suas características mais fortes: o núcleo do diagrama, por exemplo, nos diz *quem* são os objetos (todo e partes), e daí tiramos seja lá o que vamos dizer sobre essas coisas, ao passo que o núcleo das três afirmações nos diz como aquelas coisas se comportam, que propriedades têm, embora não nos digam *o quê* elas sejam (todos, partes ou outras coisas). Dizemos que núcleos como os do diagrama são *ontológicos*, ao passo que núcleos como os das três afirmações são *simbólicos*, seguindo a excelente sugestão de Jacob Klein, feita em relação à matemática grega clássica, classificada por ele como completamente ontológica, em oposição, por exemplo, à álgebra de Vieta, dita simbólica.

Vamos tomar de Davydov, então, a idéia de falar sobre uma situação dada, mas levando em conta um fator crucial, em nosso entender: vamos tratar diretamente os significados sendo produzidos, e vamos explorar esse aspecto profundamente.

Uma atividade que desenvolvemos para isso é chamada de "tanques". O seguinte texto é apresentado:



Estes dois tanques são iguais.

Para encher o tanque da esquerda são precisos mais 9 baldes. Para encher o da direita, são precisos mais 5 baldes.

O que você pode falar sobre essa situação?

Os alunos podem começar dizendo, simplesmente, que "no da direita há mais água do que no da esquerda"; essa é a *afirmação* C - A_1. Usamos também o "C" para indicar que essa é uma *crença-afirmação*, isto é, que os alunos estão enunciando algo que acreditam ser correto. Perguntamos, então: "O que é que garante que vocês sabem que podem dizer isso?" Podemos imaginar, de imediato, pelo menos duas *justificações*:

J_{1A}—"Podemos *ver*, no desenho."
J_{1B}—"Porque falta mais para encher o tanque da esquerda (9 baldes) do que para encher o da direita (apenas 5 baldes)."

Se olharmos apenas para a *afirmação*, devemos dizer que nos dois casos as pessoas têm o mesmo *conhecimento*, o de que "no da direita há mais água do que no da esquerda", mas se consideramos também as *justificações*, vemos que isso não é verdade. Os *objetos* em jogo em cada caso são distintos: em J_{1A} podemos dizer que são objetos "visuais", e que o que domina é a percepção do desenho, ao passo que no segundo caso os objetos são a água em cada tanque e baldes (de água).

É fácil também perceber que a *lógica das operações* é distinta em cada caso, basta pensar na seguinte *crença-afirmação*:

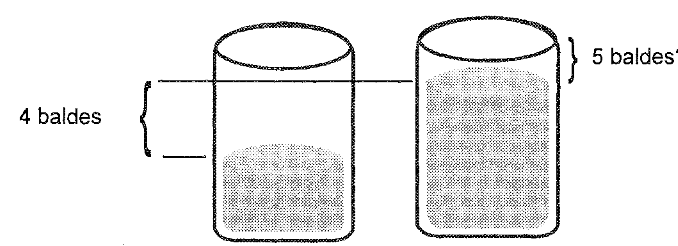
C-A_2—"Se acrescentarmos dois baldes de água no tanque da esquerda, ainda assim vai haver menos água do que no da direita."

É possível produzir uma *justificação* similar a J_{1B},

J_{2B}—"Se acrescentarmos dois baldes de água no tanque da esquerda, vão ficar faltando 7 baldes para enchê-lo, e no da direita faltam apenas 5 baldes."

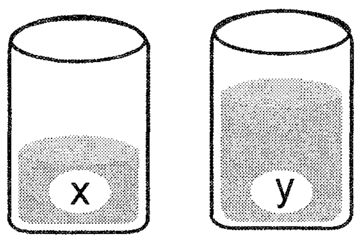
mas uma *justificação* completamente similar a J_{1A} já não é possível, pois não há como estimar diretamente quanto um balde a mais faria o nível de um tanque subir. É preciso insistir que o leitor seja cuidadoso e não tente introduzir novos objetos de forma "disfarçada": seria possível fazer essa estimativa dividindo a diferença entre os níveis em quatro partes, mas isso requer operar com o fato de que faltam 9 baldes de um lado e 5 do outro, introduzindo novos objetos.

É também possível considerar que o desenho pode ser (muito) impreciso, mais um diagrama do que uma representação realista da situação, e que nesse caso poderíamos chegar a algumas conclusões bastante estranhas:



Há dois pontos importantes. Primeiro, como no caso da atividade de Davydov, é possível produzir significados distintos para uma mesma *crença-afirmação*, o que mostra a necessidade de conhecer esses significados. Segundo, a produção de significados envolve núcleos e lógicas das operações realizadas; no caso, temos um núcleo constituído pelo desenho como representação realista de uma situação e outro constituído por certas relações dadas no texto apresentado — com ou sem um papel relevante do desenho como diagrama.

Devemos tratar da notação, o que é feito introduzindo letras para designar o tanto de água em cada tanque, por exemplo X e Y, como foi sugerido por alunos em uma classe de 6ª série:



Introduzida essa notação, e "b" para "balde", C - A_1 e C - A_2 podem ser escritas como:

C-A1 — "X < Y"
C-A2 — "X + 2b < Y"

Segundo nossa experiência, esse passo não apresenta dificuldades para alunos de 6ª série; o que se realiza aqui, na verdade, é apenas a legitimação desse tipo de notação nessa atividade. Como já havíamos comentado com relação a Davydov, a introdução dessa notação pelo professor é correta, uma vez que um de nossos objetivos importantes é que os alunos se tornem capazes de produzir significado para esse tipo de texto.

Outras *crenças-afirmações*, com suas *justificações*, são geradas, por exemplo:

C-A3 — "X + 4b = Y"
J3 — "Se juntarmos 4 baldes a X, ficarão faltando 5 baldes do lado esquerdo, que é o mesmo que falta do lado direito."
C-A4 — "Y - 4b = X"
J4 — "Se retirarmos 4 baldes de Y, ficarão faltando 9 baldes do lado direito, que é o mesmo que falta do lado esquerdo."

Já dissemos que a *lógica das operações*, própria da produção de significados em relação a um certo núcleo, imprime certas características ao que pode e ao que não pode ser dito, mas também faz com que certas *crenças-afirmações* estejam mais "distantes" do núcleo que outras. C - A_3 e C - A_4, por exemplo, são bastante "naturais" em relação ao núcleo dos tanques, mas que dizer de,

C-A5 — "Y - X = 4b"?

Que *justificação* pode ser produzida para C - A_5? *Para nós*, pode parecer natural dizer que "se tiramos o tanto de X do tanto de Y vão restar apenas 4 baldes", mas para as crianças isso pode parecer um tanto estranho: como tirar de Y um tanto (X) que não conhecemos? *Como seria possível fazer isso "na prática"*? Essa pode parecer uma questão menor, mas não é, e descartá-la como sem importância pode levar a um impasse no diálogo com os alunos.

É sem dúvida possível realizar a seguinte operação: retire um balde do tanque esquerdo e um do tanque direito. Quando o tanque esquerdo for esgotado, sobrarão 4 baldes no tanque direito, o que quer dizer que a *diferença* entre os dois tanques é de 4 baldes.

Duas coisas são relevantes aqui. Primeira, faz parte da *lógica das operações* o fato de que tirar um balde de cada tanque não altera a diferença entre eles. Segunda, não estamos associando "a diferença entre eles" à operação de retirar diretamente uma quantidade de outra.

Esse segundo ponto é muitas vezes ignorado e achamos que "diferença" está diretamente associada com "subtração", especialmente depois de carregarmos os alunos com exercícios em que "calcular a diferença entre dois números" está associado com "subtraia o menor do maior". Em estudos realizados por um de nós, muito poucos alunos de 7ª e 8ª séries, no Brasil e na Inglaterra, associaram a frase "um dos pedaços de madeira é 28 cm maior do que o outro", com expressões do tipo "a - b = 28", mesmo quando trabalhavam com a idéia de que aquela frase indicava que a diferença de tamanho era 28 cm. O que está em jogo aqui é o fato de que cálculos particulares estão sempre subordinados à *lógica das operações*, e a menos que essa lógica seja a própria lógica das operações aritméticas — caso em que estamos diante de um modo particular de produzir significado —, não há porque assumir que associações como essa entre "diferença" e subtração" estejam presentes. Do ponto de vista da sala de aula temos, então, duas opções para tratar dessa situação: uma é introduzir a "distante" operação que mencionamos acima, de ir tirando um balde de cada lado, e a outra é estabelecer a expressão "Y - X" como dizendo "a diferença entre Y e X", em vez de "Y menos X", que nesse contexto pode dizer pouco. A segunda possibilidade nos parece bastante mais interessante, embora a primeira possa *também* ser explorada.

O passo a seguir, e que diferencia nossa proposta da de Davydov, é introduzir e explorar um *outro* modo de produzir afirmações corretas sobre os tanques, e mostrar que esse outro modo é verdadeiramente distinto do anterior, no qual os significados eram produzidos em relação ao núcleo da situação dos tanques.

Pedimos aos alunos que pensem no seguinte: Como podemos descrever um processo pelo qual passamos *diretamente* da expressão "X + 4b = Y" para a expressão "Y - 4b = X"? Esse "diretamente" reflete o fato de que, como vimos, havia sido produzido significado para cada uma das expressões "X + 4b = Y" e "Y - 4b = X", em relação ao núcleo dos tanques, e de forma "independente" um do outro (apesar de o núcleo estabelecer uma certa ligação entre a legitimidade das duas expressões).

É provável que os alunos digam — como nos casos em que trabalhamos com essa atividade —, que podemos pensar que "foram retirados 4b de cada lado". É importante notar que o foco agora não é tanto em que significado essa operação tem em relação ao núcleo dos tanques: a ênfase está em pensar nas duas expressões como *objetos*, o que quer dizer que agora vamos falar sobre *elas*. É possível, é claro, considerar que "tirar 4b de cada lado", no caso da expressão "X + 4b = Y" pode significar que tínhamos os dois tanques nivelados — após adicionarmos 4 baldes ao tanque esquerdo —, e que agora, retirando 4 baldes de cada lado, os tanques continuam nivelados, mas no nível de Y. Acontece que esse tipo de *justificação* nos leva de volta aos significados produzidos em relação ao núcleo dos tanques, e não é isso que queremos. Para pôr em evidência a existência de dois modos distintos de produzir significado, voltamos à tarefa de produzir *crenças-afirmações*, mas agora os alunos são requisitados a produzir *duas justificações*: uma em relação ao núcleo dos tanques e outra em relação à transformação direta de alguma *crença-afirmação* já estabelecida. No caso de,

C-A4 —"Y - 4b = X"

teríamos:

J4A —"Se retirarmos 4 baldes de Y, ficarão faltando 9 baldes do lado direito, que é o mesmo que falta do lado esquerdo."

que é idêntico a J_4, mas também,

J_{4B} —"Basta retirar 4b de cada lado de X + 4b = Y."

Há muitas outras *crenças-afirmações* que surgem sem dificuldade:

C-A6 —"Y - 2b = X + 2b"

com,

J_{6A} —"Se retirarmos 2 baldes de Y, ficarão faltando 7 baldes do lado direito e, se adicionarmos 2 baldes a X, ficarão faltando 7 baldes também."

ou

J_{6B} —"Basta retirar 2b de cada lado de X + 4b = Y."

Logo, toda uma série de *crenças-afirmações* (na forma de expressões corretas) são geradas com os dois tipos de *justificações*:

C-A7 —"Y - 1b = X + 3b"
C-A8 —"Y - 5b = X - 1b"
C-A9 —"Y + 2b = X + 6b"

Como já comentamos, são sempre *justificações* diferentes para a mesma *crença-afirmação*, e, portanto, são diferentes *conhecimentos*. Mas, em relação a que núcleo foi produzido o significado gerado por, por exemplo, J_{4B}? O núcleo é *exatamente o que se constitui no momento em que a propriedade "tirar o mesmo dos dois lados gera uma nova expressão correta" é aceita como válida.*

Há dois aspectos cruciais nesse processo. Primeiro, é a intervenção *legítima* do professor que abre a possibilidade de constituir um novo núcleo, um processo que deve ser negociado com os alunos, isto é, eles devem ver como *legítimo* operar em relação a esse novo núcleo, e nisso o papel do professor — como autoridade e como *interlocutor* — é fundamental. Em vez de tentar "escorregar suavemente" para um novo modo de produzir significado, como se tudo fosse o mesmo de antes, e, portanto, deixando o aluno com a sensação de que *ele* deve "descobrir" como as coisas se passam "de fato", o professor torna explícita sua intenção de *tentar algo novo e diferente do que se fazia antes.*

O segundo aspecto, e que torna possível o processo indicado no parágrafo anterior, é que *as expressões que serão objeto das transformações já são objetos, isto é, já se produziu algum significado para elas.* Esses significados foram produzidos em relação ao núcleo — familiar — dos tanques; "familiar" deve ser entendido no sentido de que os alunos *já tinham recursos para operar naquele domínio, e o que se introduziu foi a legitimidade daquele modo de pensar naquela atividade.*

Vamos explorar um pouco as conseqüências do que vimos até agora.

Por um lado, fica claro que tanto as abordagens "letristas" quanto as "facilitadoras" estão, cada uma a seu modo, profundamente equivocadas. As "letristas", por ignorarem completamente que o "texto em letras" não carrega, em si, significado algum, e que este significado é produzido em relação a um núcleo, e que via de regra há muitos significados possíveis; todo "cálculo com letras" está subordinado a uma *lógica das operações*, e essa lógica imprime características particulares às possibilidades desse cálculo. As "facilitadoras", por ignorarem que a passagem de um *campo semântico* constituído em torno de um núcleo familiar para um outro *campo semântico* constituído em torno de um outro núcleo — possível e até provavelmente não-familiar — não se dá por "passagem suave", "abstração", "generalização" ou qualquer outra coisa que sugira que permanece de alguma forma uma "essência". Mesmo no caso das abordagens piagetianas, há um problema sem solução dentro do contexto daquelas teorias: pelo caminho que estamos propondo, crianças bastante jovens — 2ª série do 1º grau, no caso de nossos estudos — são capazes de trabalhar com transformações diretas, tidas como inacessíveis para crianças daquela faixa etária; o problema maior parece ser que as teorias piagetianas explicam bem um conjunto de dados experimentais gerados dentro de sua perspectiva (e a partir dela), mas fracassam em diversas situações fora desses domínios.[16]

Um segundo aspecto é que as abordagens "facilitadoras" ficam agora expostas no que têm de perverso: ao se dar a mudança de *campo semântico*, e se não há explicitação desse processo, os alunos ficam à mercê de "adivinhar" o que está acontecendo, e o professor fica incapaz de intervir de maneira mais eficaz. Examinemos um exemplo:

16. Não introduzimos, com esse comentário, nenhum fato novo. Há todo um conjunto de experimentos, hoje clássicos, mostrando que crianças que fracassam em certas tarefas piagetianas têm sucesso em outras tarefas, equivalentes (isto é, nas quais seria necessário pôr em jogo os mesmos elementos, para uma solução correta), e nas quais as condições são alteradas ligeiramente, mas de forma crucial. Dois exemplos disso são os seguintes: Peter Bryant, criativo pesquisador inglês, trabalhou com crianças que fracassavam em utilizar uma vara para comparar duas pilhas de blocos, uma sobre a mesa, outra no chão. Propôs a elas uma tarefa alternativa, em que não tinham de comparar duas pilhas de blocos, mas a profundidade de dois buracos feitos em blocos de madeira. Como os buracos não podiam ser avaliados visualmente, as mesmas crianças que antes haviam "fracassado" utilizavam, com muita naturalidade, a vara para medir a profundidade de cada buraco e assim poder compará-los. Um outro exemplo é o da investigação conduzida por Maria das Graças B.B. Dias (hoje no programa de mestrado em Psicologia Cognitiva da UFPe), na qual crianças bastante jovens eram colocadas diante da seguinte situação: "Pedro é um peixinho, e peixinhos vivem em árvores. Onde vive Pedro?" As crianças respondiam, naturalmente, que Pedro vivia na água, mas se a seguinte introdução era acrescentada, a situação mudava bastante: "Estamos agora falando de um lugar de faz-de-conta, onde tudo pode acontecer...Pedro é um peixinho, e nesse lugar peixinhos vivem em árvores..." A maior parte das crianças concluía, naturalmente, que Pedro vivia em uma árvore.

A professora, dona Tânia, escreve no quadro a equação "$3x + 10 = 100$", e diz: "Podemos dizer que $3x = 90$, não podemos?"

Os alunos concordam, e o pequeno Roberto adianta-se em dizer: "Claro, professora, podemos tirar 10 de cada lado!"

Daí é um passo para concluírem, naturalmente, que $x = 30$. Animada pelo sucesso, dona Tânia propõe exercícios como lição de casa, e, empolgada, apresenta entre esses exercícios a equação "$3x + 100 = 10$", certa de que as recentes lições sobre números negativos não terão sido esquecidas, e que a equação será resolvida sem dificuldade: "Afinal, é igual à outra, com exceção das contas com números negativos!"

Para surpresa de dona Tânia, na aula seguinte, *ninguém* havia resolvido "$3x + 100 = 10$", nem mesmo Robertinho, craque (nota 10!) com os negativos. Perplexa, dona Tânia tenta saber o que houve, e Roberto diz, timidamente: "Mas essa não dá, professora..."

Não dá o quê? Eles sabiam o que fazer com "$3x + 10 = 100$", e sabiam fazer as contas com negativos. Não era só seguir em frente? Não, e para entender melhor é preciso examinar os significados produzidos na aula anterior (o sinal "$\Rightarrow$" deve ser lido como "me permite dizer que...").

PARA DONA TÂNIA

Crença-afirmação	*Justificação*
C-A10T: "$3x + 10 = 100$" $\Rightarrow$ "$3x = 90$"	J10T: "Podemos subtrair o mesmo número dos dois lados de uma equação, e a igualdade não se altera."
C-A11T: "$3x = 90$" $\Rightarrow$ "$x = 30$"	J11T: "Podemos dividir os dois lados de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero!), e a igualdade não se altera."

Crença-afirmação	*Justificação*
C-A10R: "$3x + 10 = 100$" ⇒ "$3x = 90$"	J10R: "É como numa balança de dois pratos equilibrada: tiro 10 quilos de cada lado e continua equilibrada."
C-A11R: "$3x = 90$" ⇒ "$x = 30$"	J11R: "O todo é 90, e são três partes iguais. Basta repartir o 90 em 3, o que dá 30 para cada parte."

Silenciosamente, cada personagem produzia significados diferentes *para as mesmas crenças-afirmações*. Superficialmente, eles estavam concordando, mas, quando a equação "$3x + 100 = 10$" é proposta, há um problema para Robertinho e seus colegas:

Mas essa não dá, professora...

o que poderia ser "traduzido" (silenciosamente) como,

Não é possível produzir significado para "$3x + 100 = 10$" como uma balança de dois pratos em equilíbrio...

Para dona Tânia, tratava-se sempre de uma igualdade numérica, e a *lógica das operações* aplicava-se igualmente caso os números fossem negativos ou positivos, mas não para Roberto: não é possível ter 100 mais alguma coisa de um lado, e apenas 10 do outro, e haver equilíbrio, e as operações legítimas no caso de "$3x + 10 = 100$" não fazem o menor sentido, porque não há sequer a que aplicá-las.

Esse longo exemplo tinha o papel de mostrar no que as abordagens "facilitadoras" estão equivocadas. Diante de "$3x + 100 = 10$" e da demanda da professora para que produzissem significado para aquele texto, os alunos são forçados a assumir

uma responsabilidade que não lhes cabe: "Que raios ela quer de mim?" Em outras palavras, o aluno tem de conjuminar sozinho uma solução para seu dilema, que é o de continuar pensando como pensava (significados produzidos em relação a uma balança de dois pratos) ou adivinhar como a professora está pensando.

Via de regra, o aluno se perde. Há, no entanto, uns poucos "privilegiados" que simplesmente tentam jogar o jogo que lhes propõe (silenciosamente) a professora, e aumentam, assim, suas chances de sucesso (entre outras coisas, aprovação).

Nossa proposta de atividade continua. Agora que os alunos são capazes de produzir significado para aquele tipo de expressões de dois modos distintos, agora que entendem que as transformações diretas de expressões constituem uma — entre outras — forma de se produzir novas expressões corretas, há duas direções possíveis a seguir. Podemos buscar estabelecer, da forma mais efetiva possível, que as duas maneiras de produzir significado são diferentes ou podemos buscar explorar algumas possibilidades "técnicas" das transformações diretas. Abordaremos primeiro esta última possibilidade, principalmente por acreditarmos que ela parece mais "razoável" no contexto de nossas salas de aula de hoje.

Como indicado no trabalho de Paolo Boero, podemos nos ocupar dos processos de *antecipação e transformação*. Em nosso caso, isso quer dizer, por exemplo, dar aos alunos "pontos de partida" e "alvos", e pedir que encontrem uma transformação adequada:

Que transformação leva "$X + 2b = Y - 2B$" em "$X = Y - 4b$"?

ou a mais complexa,

Transforme "$Y - X = 4b$" em uma expressão do tipo "$b = \ldots$"

Para nossas imaginações viciadas, a resposta natural para esta última questão seria,

$$b = y\text{-}x/4$$

que foi a resposta que obtivemos de alguns alunos (era uma tarefa para casa, e alguns pais "ajudaram"). Mas uma das alunas, pensando de forma totalmente original, saiu-se com a também correta,

$$b = Y - X - 3b$$

O senso de antecipação dessa aluna não incluía, evidentemente, a noção de que uma tal transformação deveria "isolar" o "b" em um dos lados, e sua transformação é perfeitamente coerente com o que pedimos.

Não vamos nos estender aqui; esperamos que a direção esteja clara. Há muito mais que fazer, até mesmo — como fizemos em sala de aula — propor expressões desvinculadas de um núcleo como o dos tanques, e pedir coisas semelhantes às expostas anteriormente. Não houve qualquer tipo de "choque": os alunos aceitaram a afirmação da "autoridade" (o professor) de que aquelas eram expressões relativas a outras situações, como a dos tanques.

A outra direção, a de explicitar que os dois modos de produzir significado são diferentes, pode ser encaminhada assim. Se transformações diretas são vistas como *legítimas*, podemos então partir de uma expressão já estabelecida, e gerar outras expressões sem nos preocuparmos com os significados "dos tanques". Por exemplo, podemos tomar "X + 4b = Y" e retirar 5b, ou 10b, ou 15b de cada lado. Se retiramos 15b de cada lado, ficamos com:

C-A12 — "Y - 15b = X - 11b"

Mas, o que nos garante que há água suficiente em X para que retiremos 11 baldes? O desenho não sugere isso e, mesmo que sugerisse, poderíamos tirar 100b de cada lado, em vez de 15b:

C-A13 — "Y - 100b = X - 96b"

Segundo as transformações diretas, "Y - 100b = X - 96b" é uma expressão correta, mas, segundo os tanques, não é possível produzir significado para ela. *Efetivamente*, os dois modos de produzir significado são diferentes, pois um deles produz uma expressão *legítima* que não o é segundo o outro.

O professor não deveria dizer que o núcleo dos tanques é "limitado", ou coisa do tipo: a produção de significados é simplesmente *diferente* em cada caso.

❑ *Tematizando nossa proposta*

Podemos começar oferecendo o que pensamos que seja a atividade algébrica:

> *A atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a álgebra.*

e, naturalmente, temos de dizer o que seja álgebra para nós:

> *A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade.*

Por um lado, queremos enfatizar que nossa caracterização da atividade algébrica depende de "conteúdos" de uma maneira bastante particular: é apenas na medida em que explicitamos um recorte do mundo, um interesse especial por afirmações para as quais *nós* produziríamos um certo tipo de significado, que se estabelecem fronteiras para a álgebra, e mesmo assim fronteiras bastante movediças, uma vez que esse recorte não é necessariamente o da matemática acadêmica, e, sim, *o da pessoa que examina uma atividade e a classifica como algébrica ou não*. Dessa forma, o matemático profissional talvez não tenha dúvidas em classificar como algébricas atividades que envolvam permutações, ao mesmo tempo que uma outra pessoa (o aluno ou o professor, por exemplo) não o faça; o mesmo poderia ser dito de uniões e interseções de conjuntos, e assim por diante.

No entanto, é essencial notar que, embora a "atividade algébrica" fique dessa forma caracterizada, seu exame não se esgota na constatação de que estamos diante de uma atividade algébrica: é preciso investigar os significados sendo produzidos no interior dessa atividade. O que isso quer dizer, entre outras coisas, é que o recorte do que seja "álgebra" nos serve apenas para identificar atividades que podem, potencialmente, envolver pensamento algébrico, o que é importante do ponto de vista da educação matemática, embora, do ponto de vista puramente epistemológico, seja irrelevante dizer se isto ou aquilo é ou não álgebra.

Isso indica que, embora aparentemente a nossa seja uma caraterização apoiada em conteúdos mais ou menos "oficiais", ela não confere *status* epistemológico especial aos significados matemáticos (acadêmicos, "oficiais"), permitindo que se atinja o duplo objetivo que mencionamos antes: os significados divergentes dos "oficiais" não são tratados como "erro" nem vistos apenas do ponto de vista da "falta", o que torna possível uma perspectiva comum tanto para "onde o aluno está" quanto para "onde queremos que o aluno esteja".

Por outro lado, o nosso recorte para "álgebra", de clara inspiração na matemática "oficial", reconhece ser explicitamente essa sua origem cultural, e sua intenção didática. Esse é um recorte que serve para *nossas* intenções, e em *nossa* cultura. Nossa

caracterização não tem valor absoluto algum, isto é, ao afirmarmos que uma pessoa está engajada em atividade algébrica não estamos fazendo qualquer referência a como essa pessoa — como sujeito da atividade — a categoriza dentro de seu mundo.

Nós colocamos em uma mesma categoria — álgebra — coisas como equações e expressões (numérico-) literais, mas é importante, crucial mesmo, lembrar que essa nossa categorização tem como base a *possibilidade* de produzir significado para todas elas em relação a um núcleo comum: números, operações aritméticas e igualdade e desigualdade. Mas esse não é o único núcleo possível. Podemos produzir significado para equações em relação a muitos núcleos distintos: núcleos de balanças de dois pratos, núcleos de todo-partes, núcleos de máquinas estado-operador (máquinas de função), e outros.

Imaginemos, agora, que uma criança produz, para equações, significado em relação a um núcleo de balança de dois pratos, e, para o produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, produz significado em relação a um núcleo de áreas. Será razoável esperar que essa criança categorize as duas coisas juntas, "naturalmente"? Mas nossa expectativa é que um aluno de 7ª série o faça, e diga que é tudo "álgebra". Por quê? Simplesmente porque o professor *diz* que é, apesar de esse ser um processo tão bizarro como se alguém dissesse que "casa" e "cabana" são o mesmo tipo de coisa porque ambas estão na parte do "c" no dicionário — embora seja um processo perfeitamente legítimo: o valor operacional dessa categorização é muito pouco.

Parece um exagero, mas não é: Quantas vezes já dissemos e já ouvimos ser dito que nossos alunos parecem não juntar uma coisa com a outra, que, quando precisam usar produtos notáveis para resolver equações, não "conseguem"? O que estamos apresentando aqui é uma possível explicação para esse indesejável fenômeno, e uma que vai além de sugerir que os alunos devam ter mais prática em usar as coisas juntas (seja na forma de atividades mais abertas, como modelagem, ou na forma de instrução especificamente dirigida). Nossa perspectiva sugere, na verdade, que é o modo de produção de significado, os núcleos subjacentes a essa produção de significados, que pode fazer com que coisas a certa altura "distantes" como equações e produtos notáveis passem a estar articuladas. Estamos também afirmando — e nunca é demais insistir —, que a visão que sugere que há algo intrínseco nesses dois temas (algo em geral tido como o que "é" a matemática, e que vem a ser o ponto de vista da matemática acadêmica), alguma essência que torna uma tal proximidade *necessária*, essa posição está equivocada.

De nossa perspectiva, é naturalmente necessária uma reformulação do que tomamos por *conhecimento*.

Na epistemologia contemporânea, encontramos basicamente duas abordagens. Por um lado, as posições (dominantes) que assumem que a natureza do *conhecimento* é proposicional, isto é, que todo conhecimento tem a forma de uma proposição; por exemplo, "2 + 3 = 5" é conhecimento. Por outro lado, vamos encontrar alguns notáveis "rebeldes" — George Lakoff e Nelson Goodman, por exemplo —, que sugerem que a noção central seja "compreensão" e não "conhecimento". A crítica destes últimos aos primeiros pode ser resumida como um ataque ao fato de que os primeiros não conseguiram elaborar modelos segundo os quais seja possível dizer com clareza, e em qualquer situação, se uma pessoa tem ou não um certo "conhecimento", e que, nesse tem-não-tem perdemos de vista o fato de que estamos — ou deveríamos estar — interessados mais em como as pessoas fazem o que fazem no mundo, e menos se elas devem ou não receber esse ou aquele *status*. Tanto Lakoff quanto Goodmann atacam diretamente a noção de que existiria uma "realidade objetiva", que poderia ser utilizada como referência para a elaboração de critérios para "conhecimento", e este seria, portanto, a explicitação de fatos objetivos e de suas propriedades objetivas. Alfred

Jules Ayer, um dos defensores dessa perspectiva "objetiva", chega a afirmar que as únicas proposições candidatas a conhecimento são as de dois tipos: as deduzidas de premissas assumidas (como no caso da matemática acadêmica, em sua apresentação dedutiva) e aquelas cuja veracidade resulta da vivência direta de alguma experiência (objetiva); afirmações a respeito de religião, por exemplo, são descartadas de imediato.

Concordamos com Goodman e Lakoff quanto a sua crítica à existência de uma "realidade objetiva", mas pensamos que não há necessidade nem interesse em abandonar a noção de *conhecimento*.

Não há interesse, pois uma noção de *conhecimento* nos permite recortar, na fala das pessoas, aquelas enunciações da forma "*A* é *B*", que caracterizam o fato de que se está constituindo "*A*" em *objeto*, pois se está falando acerca de "*A*"; há frases de outros tipos que têm efeito semelhante, por exemplo, "aconteceu tal e tal com *A*", mas essas podem ser reduzidas às outras (nesse caso, podemos dizer, "*A* é um objeto com o qual pode acontecer tal e tal coisa").

Não há necessidade, pois podemos manter essa propriedade de *conhecimento*, de constituir *objetos*, e abrir mão da seletividade das formulações tradicionais. Os dois grandes problemas com essas formulações tradicionais referem-se, a saber: i) se uma certa proposição é verdadeira; e ii) se a pessoa que a enuncia tem *direito* de "ter esse conhecimento", isto é, a necessidade de evitar que uma pessoa "tenha conhecimento por acaso". Vamos apresentar uma nova noção de *conhecimento*, e depois mostrar de que forma ela resolve esses problemas:

conhecimento = (crença-afirmação, justificação)

Para facilitar, um exemplo,

K_1 = ("2 + 3 = 5", "Se junto dois dedos com três dedos, tenho cinco dedos.")

é um conhecimento. "$2 + 3 = 5$" é a *crença-afirmação;* "Se junto dois dedos com três dedos, tenho cinco dedos" é a *justificação.* A *justificação* é, nessa formulação, parte integrante de um conhecimento, e não apenas uma "explicação" para ele, e *conhecimento* é o par,

(crença-afirmação, justificação)

e não apenas a proposição na qual o sujeito acredita, e cuja crença afirma.

A *justificação* é o que garante — para o sujeito do conhecimento — que ele pode enunciar aquela *crença-afirmação.* Se tomamos,

K_2 = *("E=mc^2", "Li num livro que Einstein provou isso.")*

vemos que a *justificação* não é necessariamente "sobre" a *crença-afirmação,* mas é *sempre* o que garante que aquela possa ser enunciada pelo sujeito do conhecimento, e isso mostra o papel essencial do outro na produção de conhecimento. Todo *conhecimento* é produzido na direção do outro, o que quer dizer que o sujeito que o produz deve acreditar que alguém compartilha com ele aquela *justificação.* Mesmo nos casos em que a *justificação* não é enunciada — e estes parecem ser a maioria, especialmente fora da vida acadêmica —, o fato de que o sujeito produz um *conhecimento* indica que a legitimidade de sua enunciação (da *crença-afirmação*) está garantida. Em outras palavras, o problema de estabelecer se uma pessoa tem ou não o direito de "ter" um conhecimento é um problema interno do processo de produção de conhecimento, e não externo: é a própria enunciação da *crença-afirmação* que estabelece sua legitimidade, e não uma deliberação *posterior.*

O outro problema, o da veracidade, perde seu sentido original: não é a *crença-afirmação* (a proposição-conhecimento, nas visões tradicionais) que deve ser verdadeira ou não, e, sim, o *conhecimento* em sua nova formulação. Mas, outra vez, o próprio

fato de que a enunciação se deu, garante que, *para algum interlocutor, aquele a quem a enunciação foi dirigida,* ela é legítima e, portanto, verdadeira.

À primeira vista, pode parecer que o que fizemos foi trivializar os dois problemas, esvaziando-os, já que agora todo *conhecimento* é verdadeiro e toda enunciação de uma *crença-afirmação* compõem-se um *conhecimento.* Mas não é bem assim.

Nossa formulação de *conhecimento* mantém essa noção como não-trivial, e por dois motivos. Primeiro, porque não é tudo que *pode* ser dito, já que qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significados. Se alguém, começando amanhã, jogasse uma moeda para o alto e dissesse "vai chover amanhã", caso o resultado fosse cara, e "não vai chover amanhã", caso fosse coroa, e seguisse acertando por mil dias, ainda assim a comunidade dos meteorologistas não aceitaria a previsão do dia 1001 como *conhecimento.* A enunciação,

"Vai chover amanhã; (pois) eu joguei a moeda e deu cara."

não seria legítima para esse *interlocutor,* a comunidade dos meteorologistas e, se a pessoa quisesse participar dela, não poderia enunciar "Vai chover amanhã", embora talvez houvesse um outro interlocutor que a legitimasse.

Em segundo lugar, o próprio processo de produção de significados estabelece limites "internos": não é possível, por exemplo, produzir significado para "$3x + 100 = 10$" em relação a um núcleo de balança de dois pratos. A essa impossibilidade chamamos de *limite epistemológico,* e sua existência está na base de um sem-número de impasses na sala de aula, como já indicamos quando apresentamos a situação ficcional de dona Tânia e seus alunos.

Esses dois aspectos — a natureza social de *conhecimento* e os mecanismos de inserção em práticas sociais e a existência de *limites epistemológicos* — garantem que nossa formulação de *conhecimento* não cria um "vale-tudo". Além disso, ela aponta direções importantes e relativamente intocadas para a investigação: De que forma se estabelece a legitimidade de novos modos de produzir significado? Qual o papel (se há algum) da diversidade de significados para um mesmo texto? E outras.

Está claro que essas questões são relevantes para que possamos entender processos concretos de produção de significado, por exemplo, na sala de aula.

Num *conhecimento* produzido, a *crença-afirmação* corresponde ao que é novo, ao passo que a *justificação* corresponde ao que é dado. *Justificações* estabelecem um vínculo entre *crenças-afirmações* e núcleos, que são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais significado está sendo produzido. Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação "realista" ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for. Núcleos não se referem especificamente a "conteúdos" ou "áreas de conhecimento": em relação a um mesmo núcleo de balança de dois pratos, é possível produzir significado para uma equação, para a noção de justiça ou para fenômenos físicos diversos.

Os elementos de um núcleo funcionam como *estipulações locais*: localmente são "verdades absolutas", coisas que assumimos sem que haja a necessidade de uma infinita cadeia regressiva de *justificações*. O que é importante e revelador é que esse "localmente" se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas.

Uma outra noção essencial em nossa formulação é a de *lógica das operações*. Posto de uma forma simples, estamos nos referindo a um conjunto de estipulações, dentro de um núcleo, que se referem diretamente ao que pode ser feito com os objetos que estamos constituindo pela produção de significados. Por exemplo, haveria uma "lógica das operações com todo e partes", que corresponderia ao que pode ser feito com um todo e suas partes: juntar duas ou mais partes, separar uma ou mais partes de um todo, repartir o todo ou uma parte em partes (iguais ou não), comparar partes. Quando significado é produzido em relação a um núcleo de todo e partes, por exemplo, para a equação "$3x + 10 = 100$", o que pode ser feito com esse objeto depende exatamente daquela "lógica das operações com todo e partes", mas, se produzíssemos significado para a mesma equação em relação a uma balança de dois pratos, operaríamos segundo uma "lógica das operações com balanças de dois pratos". Para deixar bem claras as conseqüências disso, vejamos o que seria diferente nesses dois casos.

Se estamos operando num campo semântico constituído considerando-se um núcleo de uma balança de dois pratos, a afirmação,

$$\text{"}'3x + 10 = 100' \Rightarrow '3x = 90'\text{"}$$

decorre do fato de que "podemos tirar 10 de cada lado e manter o equilíbrio", mas, se estamos operando num campo semântico constituído com base em um núcleo de todo-partes, a mesma afirmação decorre do fato de que "se do todo (100) retiramos uma das partes (10), o que sobra são as outras partes ($3x$)". *São operações diferentes, e com lógicas diferentes*, embora em ambos os casos o cálculo que se segue seja a subtração "100 - 10".

Falta falar de *significado*, um termo tão central em tudo que dissemos. Para nós, *significado* é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se *poderia* dizer, e, sim, *o que efetivamente se diz* no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto. Na atividade dos tanques, primeiro, falamos dos tanques e de baldes de água — e então são esses os objetos —, mas depois passamos a falar das expressões — e então os objetos são as expressões.

De tudo o que dissemos até aqui, a riqueza e a complexidade do fenômeno da produção de significados emergem, mostrando que há muitos e delicados aspectos a considerar:

i) a atividade em questão, e também a tarefa que a origina;
ii) os significados sendo produzidos — e, portanto, o núcleo (ou núcleos) em jogo;
iii) o possível processo de transformação do(s) núcleo(s), e as possíveis rupturas na direção de novos modos de produção de significado;
iv) os textos sendo produzidos — notações, diagramas, escrita, fala, gestos, e sua eventual constituição em objeto;
v) o papel do professor como interlocutor;
vi) os alunos como interlocutores uns dos outros;
vii) interlocutores não-presentes;
viii) a existência de certos modos de produção de significados que queremos que os alunos dominem; e,
ix) a existência de certas *afirmações* que eles venham a assumir como corretas.

As abordagens tradicionais em educação matemática — e mesmo muitas nem tão tradicionais — tomam o ponto (ix) como sua preocupação exclusiva, ou tão central que é como se os outros aspectos não existissem.

Talvez agora fique claro, para o leitor, o porquê dessa longa seção teórica — e praticamente sem álgebra! As mudanças que estamos propondo para a educação algébrica têm sua origem em uma determinada reflexão teórica e só podem ser propriamente

compreendidas à luz dela; não se trata de "facilitar mais ou melhor", e não se trata de aplicar teorias conhecidas de novas (melhores) formas. A reformulação da noção de *conhecimento* que propomos tem conseqüências profundas para a educação matemática, tanto ao sugerir dimensões até aqui não percebidas dos processos de produção de significado — na sala de aula também — quanto diretamente ao desenvolver uma abordagem nova para a educação matemática escolar e material para uso na sala de aula. No capítulo final, voltaremos a considerar as possíveis relações entre "teoria" e "prática", retomando, também, o que foi apresentado no capítulo sobre aritmética, mas de uma outra perspectiva.

❑ *Releitura sumária da atividade dos tanques*

A atividade dos tanques compreende propriamente três etapas:[17]

1) Produção de uma coleção de expressões corretas sobre a situação dos tanques
   a) introdução de uma notação "literal/aritmética"; e,
   b) produção de *justificações* para cada expressão produzida.
2) Estabelecimento da possibilidade de transformações diretas de expressões como forma de gerar novas expressões corretas. Para cada expressão produzida, produz-se uma *justificação* com relação ao núcleo dos tanques e outra como transformação direta de uma expressão para a qual já se produziu significado.
3) Exploração das diferenças entre os modos de produzir significado praticados em 1 e 2.

17. A etapa que discutimos, de trabalhar mais com as transformações, pode ser vista como uma extensão que, apesar de bastante interessante, não faz parte da estrutura básica. Nós a discutiremos melhor mais adiante.

Os objetivos da etapa (1) são: i) produzir expressões com significado; ii) produzir expressões em uma forma "padrão", que irá aparecer (ou já apareceu) em outras atividades. O objetivo (i) é sempre atingido de forma particular, pois o núcleo, em relação ao qual os significados são produzidos, é particular dessa atividade.

O objetivo principal da etapa (2) é introduzir um modo de produzir significado que não depende (ou depende pouco) da situação particular tomada como ponto de partida. Em todas as atividades que seguem esse formato, em relação à álgebra, esse segundo modo de produzir significado caracteriza-se por um núcleo constituído pelas propriedades das expressões em relação a transformações: o que pode ser feito com elas. É essa etapa que caracteriza todo o processo de desenvolvimento de um modo algébrico de pensar (de produzir significado).

O objetivo da etapa (3) é triplo: i) permitir que os alunos compreendam que os dois modos de produzir significado são *de fato* distintos, embora ambos "funcionem" em relação à situação dos tanques; ii) permitir que os alunos compreendam que as transformações diretas de expressões são apenas *mais um, entre outros*, modos de produzir significados para expressões daquele tipo, e estabelecer o fato de que pensar daquele modo é uma opção, não uma obrigação; e, iii) permitir que os alunos tomem consciência das peculiaridades, das vantagens e das desvantagens de cada modo de produzir significado usado.

A importância — que já enfatizamos — de se explicitar nas etapas (1) e (2) as *justificações* é tornar possível a caracterização clara, para os alunos, dos dois modos de produção de significado. Sem essa explicitação, ficamos apenas no mundo das expressões, o que torna difícil — e, para muitos alunos, impossível — compreender o processo das transformações diretas desvinculado do núcleo dos tanques.

Cada etapa é essencial.

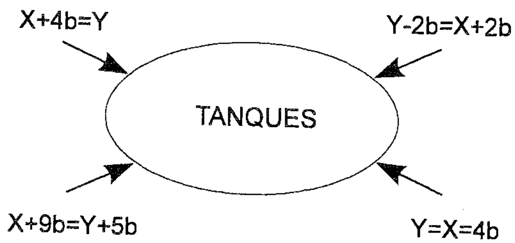
A etapa (1) garante que as expressões que serão diretamente tratadas na etapa (2) tenham já *algum* significado; a importância desse passo quase nunca é compreendida por autores e pesquisadores, mas é a ausência de significado para as expressões que estão sendo manipuladas o principal obstáculo para o desenvolvimento de lidar diretamente com elas, e não alguma dificuldade "intelectual". Isso não quer dizer que, enquanto trabalham com a transformação direta, os alunos fiquem o tempo todo voltando para os significados produzidos em relação ao núcleo dos tanques, e, sim, que, quando falam de propriedades das expressões, eles estão falando de algo que já *existe* para eles.

A etapa (2) permite o desenvolvimento, a médio e longo prazo, da legitimidade das transformações diretas de expressões e, portanto, de um modo algébrico de pensar; sua introdução é feita como um "convite a pensar diferente", e não como uma "outra forma de dizer a mesma coisa", já que o que se está fazendo é *diferente*. O grande equívoco das abordagens "facilitadoras" está exatamente na condução dessa etapa: em vez de insistir na diferença e explicitar que os alunos vão estar pensando de forma diferente, os "facilitadores" tentam escorregar silenciosamente para o outro lado, deixando a maior parte dos alunos perdidos.[18]

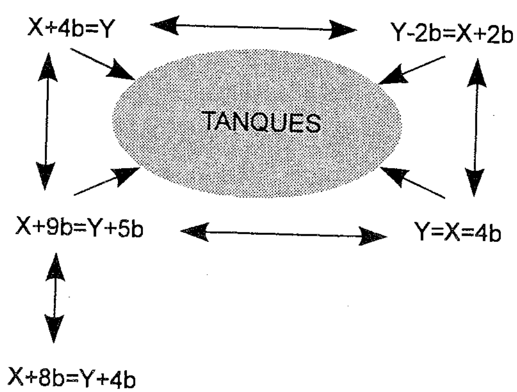
A etapa (3) consiste em uma espécie de "exercício de metacognição" durante o qual os alunos podem ir desenvolvendo a consciência de seus próprios processos cognitivos, ainda que em relação a um aspecto particular desses processos.

18. Nossa colega Rosamund Sutherland, da Universidade de Bristol (Inglaterra), contou-nos o seguinte exemplo. Ela estava observando uma aula, na França, e a professora queria trabalhar com translações. Ela se dirigiu a uma janela de correr e fez várias vezes o movimento de abrir e fechar a janela, após o que disse aos alunos que agora ia falar de uma coisa *que lembrava aquela*. Se ela fosse uma professora facilitadora, é provável que dissesse que ia falar *daquilo mesmo*, e os alunos terminariam tendo de imaginar janelas tridimensionais, que talvez servissem para fechar portas quadridimensionais.

Na etapa (1), o significado de cada expressão é produzido em relação ao núcleo de tanques:



Na etapa (2), o papel do núcleo dos tanques é bastante menos central:



❑ *Um projeto de programa para a educação algébrica*

A idéia que vamos desenvolver aqui depende essencialmente da caracterização que adotamos para a álgebra e para o pensamento algébrico.

A álgebra, como já dissemos,

> *consiste em um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade.*

Já mostramos também que há distintos modos de produzir significado para a álgebra; o pensamento algébrico é um desses modos e tem três características fundamentais:

1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso *aritmeticismo*);
2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso *internalismo*); e,
3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso *analiticidade*).

Pensar algebricamente é pensar dessa forma; é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3).

O leitor não deveria se espantar ao concluir que essa nossa caracterização de pensamento algébrico corresponde bastante de perto ao que poderíamos chamar de "manipulação formal"; é evidente que uma caracterização que deixasse de fora esse aspecto não seria de interesse. Por outro lado, é preciso ver que nossa caracterização não se esgota como "cálculo formal". Ela nos permite distinguir variedades de atividade algébrica-algébrica (isto é, aquela em que os significados são produzidos por pensamento algébrico): se "número" se refere aos reais, temos uma variedade, se refere-se aos complexos, temos outra, e assim por diante. Com isso, queremos dizer que não estamos interessados em reduzir "pensamento algébrico" a uma noção abstrata e extremamente genérica, como seria o caso se disséssemos que pensar algebricamente é "operar sintaticamente", como alguns autores parecem sugerir; para que fique caracterizada uma atividade algébrica-algébrica, é preciso que conheçamos as propriedades dos "números" e das "operações aritméticas", termos genéricos, é verdade, mas que só ganham vida "concreta" na medida em que são especificados em sua particularidade, no interior da atividade em questão.

Talvez alguns critiquem o fato de que falar de "números" nos restrinja à álgebra escolar, mas isso não é verdade, como já mostramos em outros lugares. De modo semelhante, é possível falar de "operações aritméticas" sem nos restringirmos à álgebra escolar.[19]

Nosso projeto de educação algébrica considera, então, que ela deve compreender dois objetivos centrais: 1) permitir que os alunos sejam capazes de produzir significados (em nosso sentido) para a álgebra; e, 2) permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente. Pensamos que o desenvolvimento de habilidades "técnicas" (domínio de técnicas manipulativas, por exemplo) deve ser uma conseqüência desses dois pontos; é evidente que se deve prestar atenção a esse desenvolvimento, mas é essencial reconhecer que ele não pode e não deve preceder (1) e (2).

Para atingir esses objetivos, a estrutura típica das atividades não seria muito diferente daquela da atividade dos tanques: i) dada uma situação, produzir afirmações tidas como corretas, junto com *justificações* para sua enunciação; ii) com base nas

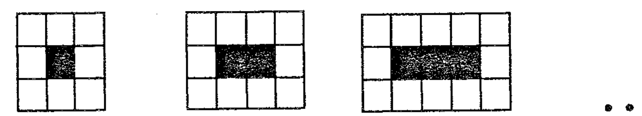
---

19. De forma resumida: não há nenhum problema técnico em dizer que "número é qualquer elemento do conjunto de base de uma estrutura algébrica". Outros autores colocam restrições, por exemplo, que essa estrutura algébrica tenha duas operações de tal e tal tipo, mas isso não é realmente necessário. Segundo nosso ponto de vista, números naturais, inteiros, reais e complexos são números, mas também o são: polinômios, vetores, matrizes, permutações, conjuntos, e assim por diante, *sempre que estiverem sendo considerados do ponto de vista da estrutura algébrica correspondente*. Por outro lado, o que caracteriza a "verdadeira" operação aritmética é a "sensação" de estar "fazendo uma conta": dois elementos são associados para "produzir" um terceiro. É essa característica — forte — das operações aritméticas "verdadeiras" que persiste nas leis de composição da álgebra abstrata, de modo que não vemos inconveniente em utilizar a nomenclatura que adotamos, de modo a preservar o *insight* que ela oferece.

expressões produzidas em (i), trabalhar *também* com transformações diretas dessas expressões. É evidentemente importante que se explicite que os dois modos de produzir significado são distintos e, se insistimos outra vez nisso, é porque não queremos que os "facilitadores" achem, nem por um minuto, que estamos dando suporte para suas propostas: Não estamos!

A situação dos tanques é bastante apropriada para esse tipo de atividade, mas certamente não é a única. Situações que envolvem balanças, áreas, máquinas de função, situações "com história" e muitas outras podem servir igualmente bem a nossos objetivos. Vamos tomar o caso dos padrões com azulejos, de que já falamos neste capítulo, e mostrar como ele ficaria se tratado do ponto de vista de nossa abordagem.

Escreva uma fórmula para calcular o número de azulejos brancos se você souber o número de azulejos pretos.



Em relação à notação a ser empregada, o processo seria similar ao que dissemos sobre os tanques, e vamos aqui usar "P" para os azulejos pretos e "B" para os brancos. Uma variedade de fórmulas pode aparecer; vamos representá-las como *crenças-afirmações* e acrescentar possíveis *justificações*:

C-A14 — "B = 2P + 6"
J14 — "Para cada preto há dois brancos, um em cima e outro embaixo; além disso, há sempre três 'em pé', em cada ponta, num total de 6."
C-A15 — "B = 2 (P + 2) + 2"
J15 — "A linha de cima e a linha de baixo têm, cada uma, P + 2 azulejos; além disso, há um branco em cada extremidade da fileira de pretos."

As *justificações* foram produzidas em relação a um mesmo núcleo, e, além disso, no caso dessa atividade, todas as expressões são equivalentes — embora os alunos não tenham necessariamente consciência desse fato. O próximo passo é olhar diretamente para as expressões: se cada uma delas representa a mesma coisa, podemos dizer que,

"2P + 6 = 2 (P + 2) + 2"

Discutindo como as duas expressões podem ser iguais, os alunos chegam eventualmente a,

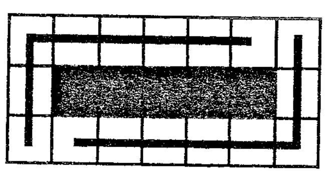
"2 (P + 2) = 2P + 4"

Esse é um primeiro passo, que pode ser explorado:

Que expressão do tipo "2 (... + ...)" é o mesmo que 2P + 6?

Se os alunos chegam a "2 (P + 3)", podemos então perguntar, "e em relação ao diagrama dos azulejos, que jeito de contar é esse?" A resposta pode ser,

C-A16 —"B = 2 (P + 3)"
J16 —"São dois 'L', cada um com P + 3 azulejos." (figura a seguir)



Um pouco mais complicado, podemos chegar à conclusão de que

C-A17 —"B = 2P + 6" ⇒ "B = 3P + 6 - P"
J17 —"Somar e subtrair P não muda nada."

e daí dizer que,

C-A18 —"B = 3P + 6 - P" ⇒ "B = 3 (P + 2) - P"
J18 —"3P + 6 = 3 (P + 2), e é só substituir."

Procuramos agora descobrir um modo de contar, no diagrama dos azulejos, que corresponda a essa fórmula, e encontramos algo surpreendente:

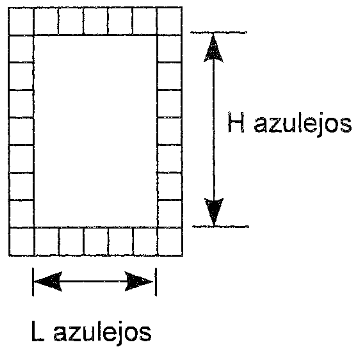
C-A19 —"B = 3 (P + 2) - P"
J19 —"Se faço 3 (P + 2), estou contando todos os azulejos no retângulo. Basta, então, tirar disso os pretos."

O ritmo desse processo certamente vai variar bastante, dependendo da série, da experiência anterior com esse tipo de atividade e com a concentração da própria turma. De posse dos princípios gerais, o professor pode acompanhar o andamento do trabalho, e manter sempre um olho nos dois objetivos que queremos alcançar.

Para que o leitor possa avaliar melhor o que nossa proposta acrescenta, podemos dizer que o tratamento tradicional dessa situação, em sala de aula, incluiria apenas produzir as fórmulas, seja diretamente (um tratamento visual/genérico) ou com base em uma tabela de dados numéricos:

P	1	2	3	4	5	6	7	8	...
B	8	10	12	14	16	18	20	22	...

É verdade que a situação do padrão de azulejos é um tanto limitada, mas podemos facilmente torná-la bastante mais aberta, tomando uma outra situação, a da piscina:



Uma piscina tem sua borda feita com azulejos. A piscina tem as dimensões indicadas ao lado.

Dê uma fórmula para calcular o número de azulejos na borda desta piscina

A mesma forma de trabalhar que utilizamos com o padrão de azulejos aplica-se aqui, com a diferença de que há um potencial maior para expressões diversas, e que temos agora 3 "variáveis": L, H e o número total de azulejos. Sugerimos que o leitor faça suas próprias investigações, e produza um bom número de fórmulas possíveis. Como seria possível produzir significado para "A = (L + 2) . (H + 2) - LH" em termos do diagrama da piscina? ("A" é o número total de azulejos na borda.)

Acreditamos que esses exemplos, mais o dos tanques, sejam suficientemente "exemplares" para que não sejam necessários outros. A idéia geral é sempre a mesma: trabalhar na direção de desenvolver a idéia de que manipular diretamente as expressões é legítima. A questão de melhorar a "destreza" dos alunos nessa manipulação depende obviamente de algum tipo de prática, seja em atividades como as que indicamos ou mesmo em simples "exercícios". O que deve ficar claro, no entanto, é que exercícios só podem ser eficazes caso os alunos compreendam a natureza do que estão fazendo, para saber que, *naquele momento*, trata-se de praticar um certo conjunto de técnicas, mas que essa prática está inserida em um quadro maior, e que ela não se justificaria em si mesma.

As atividades nas quais nos concentramos são primordialmente o que podemos chamar de "atividades de inserção", e dirigem-se centralmente a criar situações nas quais os alunos

podem tomar como legítimo um certo modo de produzir significado, de pensar. Essas atividades de inserção não tomam tanto tempo quanto se pode imaginar em princípio, mas são absolutamente essenciais. Estudos nossos, em andamento, vêm mostrando que o impacto delas no trabalho dos alunos é grande, maior mesmo do que esperávamos.

É preciso reconhecer também, no entanto, que há todo um conjunto de atividades, de outros tipos, e que são também importantes na sala de aula. Atividades de investigação, como as propostas por Boero ou por Bell, a utilização da álgebra como forma de sistematizar propriedades observadas (generalização), resolução e discussão de problemas utilizando a álgebra como ferramenta. Todas essas são formas de trabalho que devem ser utilizadas pelo professor.

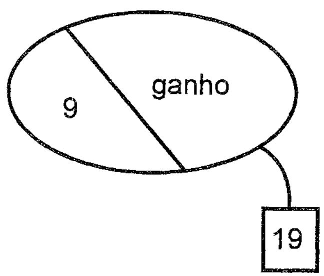
O que não vamos fazer é oferecer uma proposta de seriação para um programa de educação algébrica. Talvez baste dizer que acreditamos que começar a educação algébrica o quanto antes é fundamental, para que mais tarde não nos queixemos de como os alunos não conseguem "largar a aritmética". A questão dos conteúdos a serem tratados deve ser discutida da perspectiva que propomos, segundo a qual a atividade algébrica deve fazer parte do processo de organização de uma atividade (talvez matemática, talvez não). Oferecer "nossa" lista de conteúdos só contribuiria para "matar", prematuramente, essa discussão, o que certamente não queremos, e possivelmente centrar a reflexão do leitor num "está certo, está errado, falta isso, sobra aquilo". Preferimos nos concentrar nos princípios para uma educação algébrica.

4
CONCLUSÃO

Logo no início do capítulo 1, dissemos que iríamos mostrar que a idéia de que a aritmética deve preceder necessariamente a álgebra na escola é infundada. Pensamos que o trabalho de Davydov, discutido no capítulo 3, oferece evidência suficiente para nossa afirmação. Por outro lado, isso não deve ser interpretado como uma afirmação de que a álgebra deva preceder a aritmética, pelo motivo simples de que há todo um conjunto de experiências aritméticas, extra-escolares, que as crianças trazem consigo ao iniciar o trabalho escolar; o que devemos buscar é a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra.

O tratamento tradicional da aritmética escolar põe em primeiro plano técnicas de cálculo, mas deixa de fora tanto o desenvolvimento de um sentido numérico, como já examinamos, quanto uma discussão das lógicas das operações subjacentes ao uso do cálculo aritmético como ferramenta, um quadro claramente insatisfatório. Além do que, perde-se em termos de uma aprendizagem mais sólida, que permita um uso mais flexível e competente daquelas ferramentas, perde-se também a oportunidade de as crianças desenvolverem a capacidade de refletir sobre o que há de genérico sobre as situações envolvidas, refletir sobre a lógica das operações, o que, em última instância, refere-se a uma maior capacidade de articular os recursos postos em jogo na solução de um problema ou na condução de uma investigação.

Os exemplos são claros: a representação visual da informação numérica — como no caso que apresentamos, do consumo de bebida ao longo da semana — não se reduz jamais a um possível tratamento no qual se representam as porcentagens em relação ao total ou em relação ao máximo consumo; assim também a produção de significado para um problema do tipo "tinha 9, ganhei alguns, fiquei com 17", em termos do diagrama,



coloca *imediatamente* em jogo todo um conjunto de outras relações, sem que isso se dê pela aplicação de regras de transformação.

A educação aritmética tem sido, até aqui, insuficiente em termos de seu alcance, ao passo que a educação algébrica tem sido insuficiente em termos de objetivos. Enquanto a educação aritmética precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades que considera — com vistas sempre no desenvolvimento do sentido numérico como nós o descrevemos —, a educação algébrica precisa passar a considerar também o fato de que qualquer aspecto técnico só pode se desenvolver se, ao modo de produção de significado que o sustenta — e, portanto, à lógica das operações subjacente —, o aluno confere legitimidade. Em ambos os casos,

o da aritmética e o da álgebra, a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensarmos em termos de técnicas ou conteúdos.

As conseqüências são claras. Por exemplo, já não temos de centrar nossa discussão em se o algoritmo para extração da raiz quadrada deve ou não ser visto: é apenas no interior de uma atividade e perante a demanda que ali se apresenta, e em relação a um ou mais núcleos, que se produzirá ou não significado para aquele algoritmo, e que ele terá ou não um papel qualquer, seja como ferramenta ou como objeto. O mesmo pode ser dito em relação às frações ordinárias: não vemos muito sentido em debater se essas frações devem ou não estar nos programas, independentemente das atividades que emergirão em salas de aula concretas. Um programa pode *sugerir* que as frações ordinárias sejam de interesse, por exemplo, na comparação da eficiência de duas linhas de produção, ou no tratamento de quaisquer outras situações em que a comparação de razões possa ser relevante. Mas frações ordinárias não são o único instrumento para organizar aquelas situações (há as porcentagens, por exemplo). E assim por diante.

Em relação a uma educação básica, o nosso ensino fundamental, não nos parece que seja razoável considerar o famoso argumento da educação propedêutica: não é aconselhável sacrificar a maioria em nome de preparar uma minoria para futuros conteúdos. Dizemos isso porque muitos professores acreditam que, ao se concentrarem em trabalhar habilidades técnicas, estão preparando os alunos para técnicas mais difíceis "que vêm depois". A abordagem que propomos, mesmo rejeitando essa noção, cria *de fato* condições para que os alunos trabalhem com "técnicas", ao mesmo tempo em que nos dirigimos a permitir que *muitos* tenham acesso àquelas técnicas, e não apenas os que "adivinharam o que o professor queria". E estamos, aqui, falando tanto da educação algébrica quanto da aritmética; pensar visualmente, combinatorialmente e proporcionalmente são aspectos essenciais para quem queira prosseguir estudos na matemática acadêmica, e não apenas conteúdos técnicos e definições estéreis.

A educação aritmética e algébrica para o século XXI deve, a um só tempo, integrar-se com a rua — isto é, cumprir um papel de organizar o mundo fora da escola *também* —, e tornar-se mais efetiva em seu papel de ajudar os alunos a *aumentar* seu repertório de modos de produzir significado.

Há 50 anos, a matemática para o cidadão comum era estritamente coisa de papel e lápis, quando muito de máquina registradora, no comércio. Hoje, não. O acesso a calculadoras é extenso — às vezes, compra-se um aparelho de barbear e recebe-se, de brinde, uma calculadora —, e a tendência a aumentar o acesso a computadores é real. Mas não precisamos pensar apenas neles: jornais e televisão trabalham cada vez mais com gráficos e outros recursos visuais de apresentação de dados; códigos de todo tipo nos rodeiam; fórmulas, para calcular dosagem de remédios ou impostos. O que é preciso entender é que cada um desses instrumentos ou situações envolve modos próprios de pensar, e que disso a escola deve se ocupar; de nada adianta a pessoa ver um gráfico de, por exemplo, variação no preço da cesta básica, se o único significado que consegue produzir é o de que aquilo é "o gráfico de uma *função*". Em relação a relações quantitativas, é necessário *também* "pensar com gráficos" e "pensar com diagramas".

No caso da educação algébrica básica, devemos entender sua contribuição à formação das pessoas de maneira ampla. Primeiro, em sua participação na educação aritmética e na formação de um sentido numérico. Segundo, e muito naturalmente, em seu papel no desenvolvimento de instrumentos para a resolução de problemas e para processos investigativos — dentro e fora da matemática (o que contempla a obsessão propedêutica de alguns, de que os alunos possam, no futuro, aprender mais...álgebra). Por fim, e este é um papel em geral ignorado, evitar que muitos de

nossos alunos permaneçam impedidos de compreender um aspecto-chave de nossa cultura: pensar o mundo em números.

Não vamos nos estender nesse último ponto, até porque há um excelente livro sobre o assunto, publicado no Brasil: *O sonho de Descartes*, de P. Davis e R. Hersh (Livraria Francisco Alves Editora). Vamos ressaltar, no entanto, esse fato geral de que, cada vez mais, nosso mundo é descrito em números: trajetórias de planetas (desde o tempo de Newton), todo tipo de leis físicas (sobre quedas, calor e interação entre partículas subatômicas), números de telefone, senhas de acesso em caixas eletrônicos, o "valor" de uma dissertação escolar sobre D. Pedro II, o "valor" de um magnífico salto de um ginasta. Nas bolsas de valores aparecem e somem bilhões e bilhões em minutos, sem que um parafuso sequer tenha sido produzido ou destruído: tudo se dá no mundo dos números qualificados com "dinheiro". Há números médios (que em si não dizem muito: o aluno tira zero numa prova e dez na outra; o que quer dizer o cinco de "média" que ele obteve?), números gigantescos e números minúsculos (a probabilidade de você ganhar na Mega-Sena).

Para alguém que ouve dizer que Einstein revolucionou a física, dizendo que "$E = mc^2$", mas que não compreende o fato — mínimo — de que essa equação exprime uma relação entre quantidades, a sensação deve ser de um tremendo achatamento cultural. Dos milhões de pessoas que repetem confiantes a palavra de ordem "$E = mc^2$", é provável que a esmagadora maioria não faça a *menor* idéia do significado físico daquela expressão, mas o que certamente eles compartilham é a convicção de que expressões como essa são legítimas, podem ser enunciadas. Esse pode parecer um aspecto sem importância, mas não é, porque sua extensão, a freqüência com que ocorre, faz dele mais do que um caso particular. Aquele que não *diz* "$E = mc^2$", em geral, sabe tanto de física quanto o que o diz, mas aquele é excluído de um certo discurso, e este não.

Mais do que isso, se queremos que as pessoas venham a produzir significados mais ricos para essas expressões que transformam o mundo em números, *é necessário que elas antes de mais nada as vejam como legítimas*. Para "falar bem em números", é preciso "falar em números", e assim como um sentido numérico adequado exige mais do que unidades, dezenas, centenas e as quatro operações, "falar bem em números" exige conceder legitimidade a relações quantitativas e a seu tratamento como tal. E são essas as coisas que propomos como base da educação aritmética e algébrica para o século XXI.

A partir do momento em que o "falar bem em números" dirija seu olhar para a rua, a álgebra vai deixar de ser coisa do domínio exclusivo da escola, e há uma conseqüência disso cujo alcance é tremendo.

Havíamos dito, na Introdução, que era possível entender o porquê de a álgebra representar um momento de corte severo na educação matemática escolar, e agora estamos em condições de oferecer nossa interpretação. Por ser de domínio exclusivo da escola, o fracasso na álgebra escolar significa um fracasso *absoluto*. Se você fracassa no Português escolar, isso não o impede de falar; se você fracassa na Educação Física escolar, isso não o impede de jogar bola na rua. Mas, se você fracassa na álgebra escolar...

Na raiz disso estão duas coisas. Primeiro, é verdade que na rua não se apresenta a demanda para que se produza significado para, por exemplo, "$x^2 + 2x + 1 = 0$"; para melhorar a situação nessa frente, é preciso um esforço maior para popularizar a matemática, fazê-la mais presente em jornais e revistas populares, assim como já se começa a fazer com a física, a química e a medicina, por exemplo, nas seções de "Ciências". Por outro lado, a escola hoje termina por bloquear a porta de saída que restava: ou bem ela nega os significados não-matemáticos para a álgebra — adotando um ensino formal, como no caso da maioria dos livros-didáticos ou na proposta da chamada Matemática Moderna — ou, então, ela os admite, mas apenas para substituí-los pela versão "completa", a "essência", que seriam os significados matemáticos; essa é a proposta dos "facilitadores".

Retomando o que dissemos várias vezes, é preciso que a escola tenha a dignidade de admitir que significados matemáticos são *mais um* modo de produzir significado, e não o único, e mais, que os significados matemáticos e os não-matemáticos são *diferentes*. Apenas assim, permitindo a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola, poderemos aspirar à legitimidade dos significados matemáticos fora da escola. A educação aritmética e algébrica precisa se preocupar em mostrar aos alunos que os significados matemáticos podem servir para organizar atividades que, *de todo modo e de outras maneiras, poderiam ser organizados sem os significados matemáticos*. Com isso, estes passam a ser vistos como legítimos; se eles vão ou não prevalecer para essa ou aquela pessoa, essa é uma questão diferente, que não cabe analisar aqui. Indicaremos apenas que o trabalho de Roberto Baldino, da Unesp-Rio Claro, preocupa-se centralmente com os processos de legitimação de formas de produção de significado.

O grande objetivo da educação aritmética e algébrica, hoje, deve ser o de encontrar um equilíbrio entre três frentes: i) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar situações; ii) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que poderíamos chamar de atividades de inserção e tematização; e, iii) o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade.

Os pontos (i) e (ii), embora descritos separadamente, estão profundamente relacionados. Primeiro, porque em situações como as de (i) revelam-se um sem-número de novos modos de pensar pelos alunos, e que podem ser tematizados, ao mesmo tempo em que é a partir dali que surge a necessidade de novos modos de pensar e de novas ferramentas. Por outro lado, como já dissemos, as atividades de inserção não devem proceder como se nada houvesse antes do que o professor quer dizer; não se trata de *substituir* os antigos modos de pensar, e, sim, de desenvolver novos modos, compará-los com os outros e avaliar os pontos fortes e fracos de cada um.

Talvez a melhor maneira de representar o que imaginamos para o processo todo seja pensar em ciclos: com base em situações que estão sendo exploradas, surge a possibilidade ou a necessidade de tematizar certos aspectos do que está acontecendo ali, ou de introduzir certas novas considerações, e, com base no que se produz assim, naturalmente buscar meios de tornar os instrumentos desenvolvidos mais seguros e mais familiares. Não estamos introduzindo nada novo com essa idéia de ciclos; outros autores já a adotaram. O que queremos é indicar que nossa proposta de trabalhar com base em *significados*, e não em *conteúdos*, funciona perfeitamente bem com a idéia de ciclos. Acreditamos que o trabalho com base em significados dá, também, uma flexibilidade bastante maior àquele tipo de trabalho, pois permite ao professor uma leitura positiva e permanente do que os alunos estão dizendo e fazendo, ao passo que o trabalho centrado em conteúdos — que também poderia seguir o padrão dos ciclos — padece dos problemas que indicamos, por exemplo, no capítulo 3, em relação à álgebra: é difícil trabalhar da perspectiva de que o aluno ou bem alcançou plenamente o que queríamos ou bem está em falta (e não sabemos onde ele está). A idéia dos ciclos é forte porque propõe um desenvolvimento que não se dá de uma só vez, substituindo a linearidade da aprendizagem — que não existe! — pelas visitas sucessivas e repetidas aos mesmos temas, cada vez de uma maneira diferente, em uma situação diferente. Os ciclos podem oferecer, além de tudo, a possibilidade de partir de uma atividade com "intenção" algébrica, e passar para uma outra, de "intenção" aritmética, ou vice-versa. Usamos as aspas para indicar, mais uma vez, que é apenas *no interior da atividade* que ela se caracteriza, é apenas em seu decorrer.

Nem o professor nem a tarefa devem manter os alunos em camisas-de-força, embora a intervenção do professor seja essencial, como já discutimos.

Um outro aspecto do trabalho em ciclos é que ficam revistas as noções de teoria e prática, e a relação entre elas. Com esse tipo de trabalho, o papel e a origem de toda teoria devem estar evidentes para os alunos. Não se trata, evidentemente, de defender um pragmatismo a toda prova, um utilitarismo na educação matemática, e, sim, de afirmar que, *mesmo nos casos em que a teoria que está sendo estudada não se dirige a resolver um problema proposto nem a organizar uma investigação em andamento, ainda assim a motivação para seu estudo surge no interior de uma dessas atividades.* Esse tipo de atitude, por parte do educador matemático, reintroduz uma componente importante da atividade matemática, estabelecendo claramente que esta é histórica e material, e que tem sujeitos. Acima de tudo, é fundamental, do ponto de vista da formação crítica dos alunos, que não se estabeleça o arbítrio na sala de aula.

Uma outra característica do trabalho com base em significados refere-se à questão das notações. Nos capítulos 2 e 3, tivemos oportunidade de observar que muitas pessoas ainda parecem considerar que notações carreguem "em si" este ou aquele significado. A questão poderia ser tratada de forma simples, pois poderíamos dizer que o significado "está em quem interpreta, e não na notação". Mas essa questão tem mais aspectos a serem explorados.

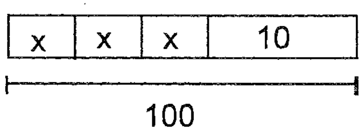
Por um lado, é verdade que uma determinada notação pode estar "carregada" de significado, e o que queremos dizer com isso é que, para uma certa pessoa, é difícil ver aquela notação empregada de forma diferente da que ela está acostumada a empregar. Um exemplo simples é este:

Resolva, para m, a equação $x^2 + mx + 2 = 0$

Nossa escolarização é tão insistente em que "x é sempre a incógnita" que podemos ficar inclinados, ainda que num primeiro momento, a utilizar a fórmula de Báscara, vendo ali uma equação de segundo grau. John Mason propôs, em um artigo seu, que experimentássemos escrever a definição de limite trocando os épsilons por deltas e vice-versa.

O que está acontecendo é que certos modos de produção de significado tornaram-se legítimos à custa de outros. Se é "certo" ou não que "x é sempre a incógnita", essa é outra questão. O relevante é que essa seletividade opera na produção de significados, e não como se um dado significado passasse a "residir" numa dada notação. Se isso não é claramente compreendido, fica difícil entender por que o aluno não "vê" o mesmo que nós. Mas há mais.

Tomemos a equação "3x + 10 = 100". Se estou produzindo significado algébrico, isto é, pensando algebricamente, tudo que importa são as propriedades dos números e da igualdade em relação às operações aritméticas; não há nada mais, e a notação acima é perfeitamente *adequada*. Mas, se estou produzindo significado em relação a um núcleo de todo e partes, talvez seja mais adequado um diagrama,



uma notação "carregada" do que é relevante, a possibilidade de juntar, separar e comparar partes. Se a análise da atividade algébrica e aritmética não é feita do ponto de vista dos significados, fica difícil entender a questão da adequação, e ficamos em grande parte restritos a pensar que o "poder" da "notação algébrica" é absoluto. No caso da aritmética, já mencionamos a necessidade de se pensar, por exemplo, com gráficos e diagramas.

O terceiro ponto a considerar, em relação a notações, é o da legitimidade. Em relação a uma criança que aprendeu a ler e a ver as letras como "notação para palavras" — só para sugerir um paralelo... —, e que aprendeu a usar números e sinais para as operações com números, não deveríamos esperar, num primeiro momento, que lhe parecesse razoável misturar letras com sinais para operações e com números, *ainda que uma vez isso feito o resultado parecesse absolutamente claro*. É o caso da notação que se introduz na atividade dos tanques: uma vez estabelecida a notação com letras, não há dificuldade, precisamente porque os significados estão claros. O papel do professor, ou de alguns dos alunos, é estabelecer que aquela notação, naquela situação, é legítima.

Uma notação deve, então, ser legítima e adequada, e nesse processo é que ela vai se "carregando" de significados, o que quer dizer que se transforma em objeto para a pessoa, um objeto que se conhece cada vez melhor.

Fechando, repetimos algo em que insistimos durante todo este livro: é preciso examinar criticamente, e com muita severidade, todos os modelos que nos permitam apenas a leitura dos outros pela *falta*. Esse é, com certeza, um dos mais poderosos instrumentos a serviço de excluir tudo que não é como somos, de minimizar o valor da produção de outros como forma de maximizar o valor da minha produção; a escola tem sido particularmente útil nesse processo, mas não precisa ser assim. A escola tem sempre um papel na manutenção de uma identidade cultural, mas é preciso perguntar, em nosso caso, qual é a identidade cultural que ela tem preservado. Embora termos como "civilização ocidental" sugiram que somos um todo homogêneo, estamos bem longe disso. Parece-nos que "crianças urbanas, filhas de pais operários" é uma categoria tão original — e diferente de "nós" — quanto "índios xavantes", e do mesmo modo que respeitamos a organicidade da cultura destes, temos de respeitar a daqueles. Existe, é verdade, a expectativa de que "crianças urbanas, filhas de pais operários" sejam, como diz Alan Bishop, enculturadas, mas não os índios xavantes, mas isso não muda o fato de que a nossa atual educação escolar favoreça, em algum momento, que eles se sintam um grupo em extinção: a extinção da rua e da infância deles, talvez. Ao pensar a educação matemática em termos de significados, é possível um tratamento mais correto desse processo.

OUTRAS LEITURAS

ASCHER, M. e ASCHER, R. *Code of the Quipu.* Michigan: Ann Arbor Ed., 1981.

ASIMOV, Isaac. *No mundo dos números.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1983.

AZEVEDO, Maria Verônica Rezende de. *Jogando e construindo matemática.* São Paulo: Ed. Unidas, 1993.

BEZERRA, Jair. *Vamos gostar de matemática.* Rio de Janeiro: Philobiblion, 1985.

BORTOLOTTO, Angela G. e ANDREAZZA, Marlís Stela S. *Matemática de 1ª a 4ª séries (uma abordagem metodológica).* Caxias do Sul: Educs, 1988.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. e SCHLIEMANN, A. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

CASTRO, E. "Visualización de secuencias numéricas". *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 1. Barcelona, 1994, pp. 75-84.

CASTRO, E. *et al. Números y operaciones.* Madri: Síntesis, 1988.

CENP/SE. *Atividades Matemáticas* (4 vols.). Vários autores. Sao Paulo: Cenp/SE, 1988.

CENTENO, J. *Números decimales*. Madri: Síntesis, 1989.

FAYOL, Michel. *A criança e o número. Da contagem à resolução de problemas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FEY, J. "Quantity". *In:* Steen, L.A. (org.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1990, pp. 61-94.

FRAGA, Maria Lúcia. *A matemática na escola primária: Uma observação do cotidiano*. São Paulo: EPU, 1988.

FREUDENTHAL, H. *Didactical phaenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel, 1983.

GIMENEZ, J. "Del fraccionamiento a las fracciones". *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 1. Barcelona: Graó, jul. 1994, pp. 101-117.

GIMENEZ, J. e GIRONDO, L. *Cálculo en la escuela*. Barcelona: Graó, 1993.

GIMENEZ, J. e LINS, R.C. "Sentido aritmético y algebraico, ¿o algo más?". *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 9. Barcelona, 1996.

________. *The need for emphasising arithmetical and algebraic global sense and semantics in arithmetic and algebra: Searching for the future*. (J. Gimenez; R.C. Lins e B. Gómez, orgs.). Tarragona: Universitat Rovira i Virgili, 1996.

GIMENEZ, J.; LINS, R.C. e GÓMEZ, B. (orgs.). *Arithmetic and algebra: Searching for the future*. Tarragona: Universitat Rovira i Virgili, 1996.

GÓMEZ, B. *Numeración y cálculo*. Madri: Síntesis, 1988.

________. "Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: Un análisis en la formación de profesores". Tese inédita. Univ. de Valencia, 1994.

GREENO, J. "Number sense as situated knowing in a conceptual domain". *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 1991, pp. 170-218.

GROSSI, Esther Pillar. *Psicogênese e aprendizagem do conceito múltiplo*. Porto Alegre: Geempa, 1986.

________. *Numeração em diversas bases*. Porto Alegre: Geempa, 1986.

GUITEL, G. *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris: Flammarion, 1981.

HIEBERT, J.-WEARNE, E. *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics*. Nova Jersey: Lawrence Erlbaum Associated Hillsdale, 1986.

HOGBEN, L. *El universo de los números*. Barcelona: Destino, 1966.

IFRAH, Georges. *Os números: A história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

________. *Historia universal de las cifras*. Madri: Alianza, 1989.

KAMII, Constance. *A criança e o número*. 23ª ed. Campinas: Papirus, 1997.

KAMII, Constance e DECLARK, Georgia. *Reinventando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget*. 12ª ed. Campinas: Papirus, 1996.

KAMII, Constance e JOSEPH, Linda L. *Aritmética - Novas perspectivas: Implicações da teoria de Piaget*. 6ª ed. Campinas: Papirus, 1997.

KAMII, Constance e LIVINGSTON, S.J. *Desvendando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget*. 2ª ed. Campinas: Papirus, 1995.

LINS, R.C. *Programa para o aperfeiçoamento de professores da rede estadual de ensino: Matemática* (fascículo). Fundação para o Desenvolvimento Escolar - FDE, Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 1992.

________. *Programa para o aperfeiçoamento de professores da rede estadual de ensino: Matemática* (vídeo). Fundação para o Desenvolvimento Escolar - FDE, 1992.

________. *A framework for understanding what algebraic thinking is.* Tese apresentada para obtenção do grau de PhD, University of Nottingham, 1992.

________. "Epistemologia, história e educação matemática: Tornando mais sólidas as bases da pesquisa". *Revista da Sociedade Bras. de Educação Matemática*, nº 1. São Paulo, set. 1993.

________. "Campos semánticos y el problema del significado en álgebra". *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 1. Barcelona, 1994.

________. "Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula". *A Educação Matemática em Revista*, nº 2 (Sociedade Bras. de Educação Matemática). 1994.

________. "O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico". *Revista Dynamis* (Furb - Fundação Universidade Regional de Blumenau). 1994.

________. "O que é que a matemática tem a ver com esportes?". *Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.* Paraná, 1995.

________. "Discos, fitas e hotéis: Produzindo significado para a álgebra". *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.* São Paulo, 1995.

________. "Epistemologia e matemática". Número Especial do Bolema *Ciclo Temático: Representação do conhecimento ou o conhecimento da representação?*. Rio Claro: IGCE/Unesp, 1995.

LINS, R.C. (org.) Número especial do Bolema *Ciclo Temático: Representação do conhecimento ou o conhecimento da representação?*. Rio Claro: IGCE/Unesp, 1995.

MEIRA, L. "Atividade algébrica e produção de significados em matemática: Um estudo de caso". *In:* Maria da Graça Dias e Alina G. Spinillo (orgs.). *Tópicos em psicologia cognitiva.* Ed. UFPe, 1996.

MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. *O ensino de matemática no primeiro grau.* São Paulo: Atual, 1986.

NCTM. *Cálculo.* São Paulo: Atual, 1993. Col. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.

________. *Números e numerais.* São Paulo: Atual, 1995. Col. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (coord.). *O ensino de frações no 1º grau.* Vitória: Ufes-Leacim, 1995.

________. *O ensino de proporcionalidade no 1º grau.* Vitória: Ufes-Leacim, 1995.

RESNICK, L.B. "A developmental theory of number understanding". *In:* H. Ginsburg (org.). *The development of mathematical thinking.* Nova York: Academic Press, 1983.

SANTOS, Vânia Maria P. dos e REZENDE, Jovana Ferreira de (coords.). *Números. Linguagem universal.* Proj. Fundão. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

SEGOVIA, I. *et al. Estimación en cálculo y medida.* Madri: Síntesis, 1989.

SINGER, J.A. e RESNICK, L.B. "Representations of proportional relationship: Are children part-part or part-whole reasoners?". *Educational Studies in Mathematics*, nº 23. 1992, pp. 231-246.

SOWDER, J. "Estimation and number sense". *In:* D.A. Grows (org.). *Handbook for research on mathematics teaching and learning.* Nova York: Macmillan, 1992, pp. 371-389.

SPINILLO, A.G. "Proporções nas séries iniciais do primeiro grau". *In:* A.D. Schliemann; D.W. Carraher; A.G. Spinillo; L.L. Meira e J.T.R. Falcão. *Estudos em psicologia da educação matemática.* Recife: Ed. UFPe, 1993, pp.40-61.

________. "O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola". *A Educação Matemática em Revista (Sbem)*, 2(3), 1994a, pp. 41-50.

________. "Raciocínio proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas educacionais". *Revista Pro-Posições*, 5(1). Campinas: Unicamp, 1994b, pp. 109-114.

STREEFLAND, L. *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TINOCO, Lúcia (coord.). *Razões e proporções*. Proj. Fundão. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

TYLER, Jenny e ROUND, Graham. *Enigmas com números*. Lisboa: Gradiva, 1992.

UDINA, F. *Aritmética y calculadoras*. Madri: Síntesis, 1989.

UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas, nº 9. "El futuro de la aritmética y el álgebra". Barcelona: Graó, 1996.